



Technical University of Lodz  
Institute of Electronics

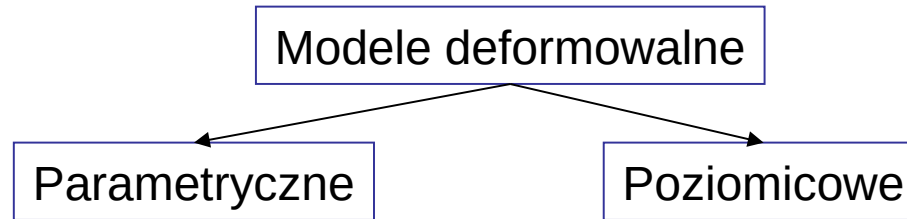
# Metody obliczania naprężeń w siatkach nieregularnych modeli deformowalnych

Piotr M. Szczypiński

Seminarium Instytutu Elektroniki  
19 listopada 2009

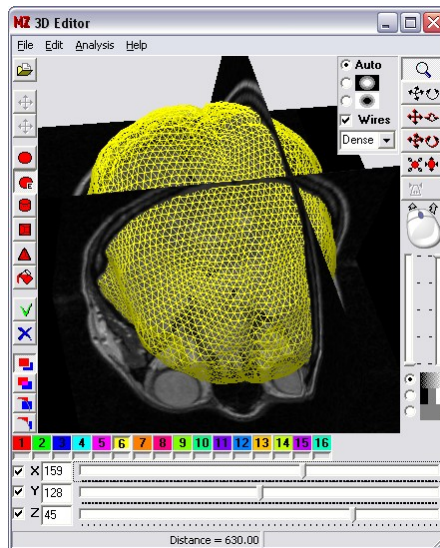


# Modele deformowalne (parametryczne/poziomicowe)

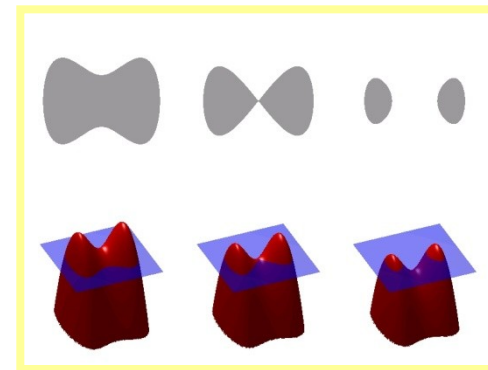


M.Kass, A.Witkin, D.Terzopoulos; *Snakes: Active contour models*; International journal of computer vision, 1988

S. Osher, J. A. Sethian; *Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*; *J. Comput. Phys.* 1988



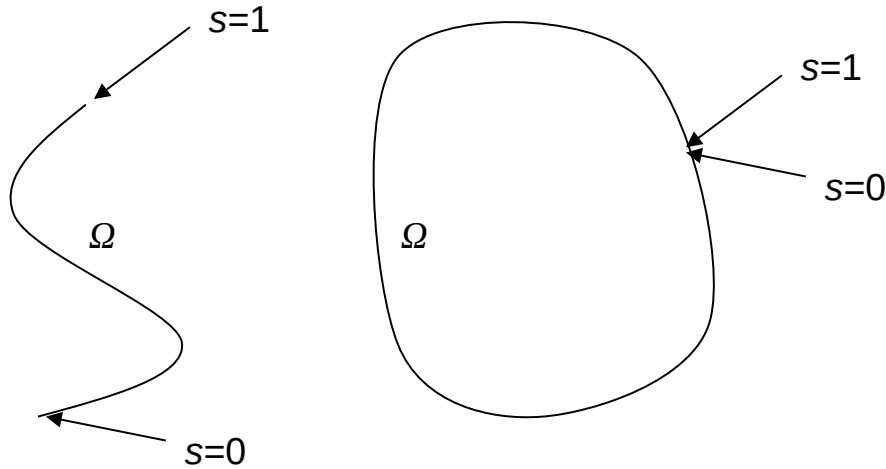
źródło: własne



[http://en.wikipedia.org/wiki/Level\\_set\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Level_set_method)



# Modele deformowalne (parametryczne, o jawnej reprezentacji)



Kształt definiuje funkcja wektorowa współrzędnych punktów krzywej sparametryzowanej parametrem  $s \in \langle 0, 1 \rangle$ . Gdzie  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Krzywa (w podejściu dynamicznym) może zmieniać swój kształt w czasie  $t$  (może ewoluować).

$$\mathbf{v}(s, t) = [x(s, t), y(s, t)]^T$$

Wymiarowość parametru  $s$  (1) jest o jeden mniejsza od wymiarowości przestrzeni wektora  $\mathbf{v}$  (2).  
Wymiarowość wektora  $\mathbf{v}$  jest równa wymiarowości przestrzeni analizowanego obrazu.

W jednym z podejść ewolucja jest wynikiem procesu minimalizacji tzw. energii modelu obliczanej jako całka gęstości energii wewnętrznej i zewnętrznej wzdłuż krzywej.

$$E_S = E_I + E_E = \int_{\Omega} [E_{\text{int}}(\mathbf{v}(s)) + E_{\text{ext}}(\mathbf{v}(s))] ds$$



# Podójście energetyczne

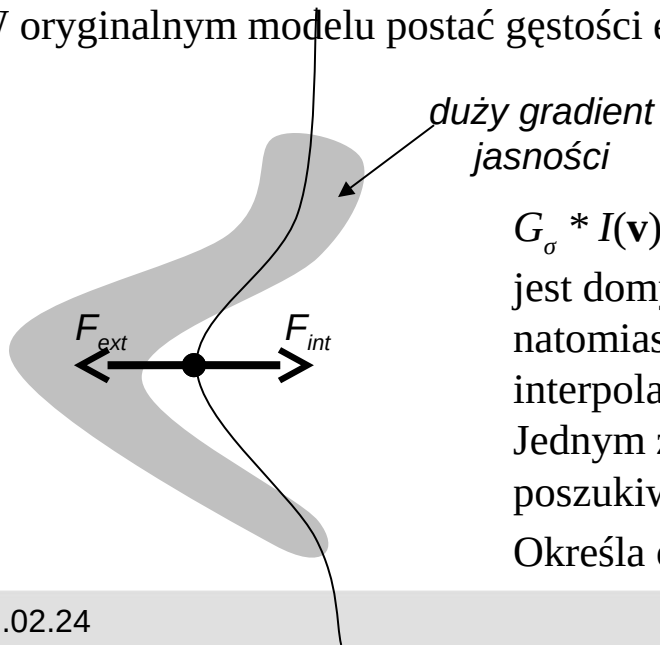
Energia wewnętrzna składa się z części oporności na rozciąganie (elasticity) i oporności na zginanie (rigidity). Równanie struny.

$$E_{\text{int}}(\mathbf{v}(s)) = \tau \left| \frac{\partial \mathbf{v}(s)}{\partial s} \right|^2 + \rho \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}(s)}{\partial s^2} \right|^2$$

Równanie to praktycznie w niezmięnionej formie jest stosowane we wszystkich modelach parametrycznych. **Prowadzona jest dyskusja czy oba składniki są potrzebne i jaki jest ich wpływ na kształt konturu. Składnik odporności na rozciąganie powoduje, że kontur ma tendencje do kurczenia się.**

W oryginalnym modelu postać gęstości energii zewnętrznej definiuje równanie.

$$E_{\text{ext}}(\mathbf{v}(s)) = -c \left| \nabla (G_{\sigma} * I(\mathbf{v})) \right|^2$$



$G_{\sigma} * I(\mathbf{v})$  splot obrazu z gaussowskim filtrem rozmywającym. Obraz  $I$  jest domyślnie funkcją określoną w dziedzinie  $\mathbf{R}^2$ . Obrazy cyfrowe są natomiast określone w dziedzinie dyskretnej. Oznacza to konieczność interpolacji obrazu cyfrowego.

Jednym z kierunków badań nad deformowanym konturem jest poszukiwanie nowych formuł definiujących gęstość energii  $E_{\text{ext}}$ .

Określa ona, w jaki sposób treść obrazu wpływa na kształt konturu.



# Model statyczny

Kontur minimalizujący energię musi w każdym swoim punkcie spełniać równanie Eulera-Lagrange'a (rachunek wariacyjny). Rozwiązanie statyczne nie jest zazwyczaj możliwe (obraz nie jest dany funkcją analityczną).

$$-\tau \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} + \rho \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} + \nabla E_{ext}(\mathbf{v}) = 0$$



# Model dynamiczny

Dynamiczny aktywny kontur do rozwiązania problemu wykorzystuje równanie ruchu modelujące bezwładność (masę  $\mu$ ) konturu i lepkość środowiska  $\gamma$ .

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \tau \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} + \rho \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} = -\nabla E_{ext}(\mathbf{v})$$

lub

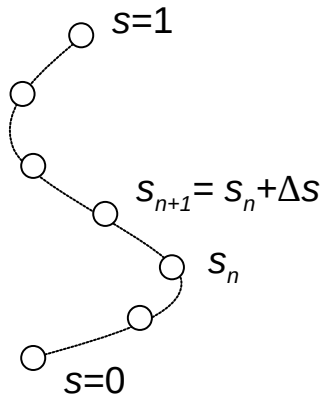
$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \tau \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} - \rho \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} - \nabla E_{int}(\mathbf{v})$$

lub zanedbując masę i przyjmując analogię fizyczną sił oddziałujących na ciało minimalizujących jego energię potencjalną:

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{v}) + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{v})$$



# Dyskretyzacja



W implementacji numerycznej dyskretyzacji poddawany jest parametr  $s$ . Współrzędne punktów  $\mathbf{v}(s)$  w dyskretnym modelu można przedstawić jako wektor wektorów współrzędnych  $\mathbf{u}$ .

Postać równania ruchu w wersji dyskretnej. Kropki nad  $\mathbf{u}$  oznaczają pochodną po czasie, a w zasadzie odpowiedni iloraz różnicowy, ponieważ czas zostaje również zdyskretyzowany.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{ext}$$

lub w wersji uproszczonej

$$\gamma\dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{ext}$$

Macierz  $\mathbf{K}$  jest macierzą pentadiagonalną odpowiedzialną za modelowanie odporności modelu na rozciąganie i zginanie.

Operacja mnożenia wektora  $\mathbf{u}$  przez macierz  $\mathbf{K}$  jest równoważna filtracji SOI współrzędnych kolejnych punktów konturu.

oporność na zginanie	2	-8	12	-8	2
oporność na rozciąganie	0	-2	4	-2	0



# Modyfikacje

Siła  $F_{\text{ext}}$  w oryginalnym modelu jest siłą zachowawczą minimalizującą energię potencjalną będącą wynikiem oddziaływania obrazu na kontur. W podejściu dynamicznym możliwe jest wprowadzenie sił niezachowawczych modelujących tarcie lub stałych sił kompensujących niekorzystny efekt kurczenia się konturu.

Można wprowadzać dodatkowe oddziaływania (funkcje wulkaniczne), które pozwalają na ręczne modelowanie kształtu konturu.

Siła oddziaływania zewnętrznego w oryginalnym modelu przesuwa kontur do miejsc o dużym gradiencie jasności obrazu. W modelach obszarowych określa się cechy wnętrza i zewnątrz obiektu, którego kontur się wyznacza. Jeśli punkt konturu znajduje się wewnątrz to jest on wypychany, jeśli na zewnątrz to jest on wciągany do środka. W modelu balonowym siły zewnętrzne oddziałują w kierunku równoległym do normalnej konturu, w modelu z punktem środkowym kierunek oddziaływania tych sił ograniczone są do prostych przechodzących przez arbitralnie wybrany (wskazany) punkt wewnątrz obszaru.





# Ograniczenia

Problemem nierozwiązanym w pełni pozostaje tendencja do kurczenia się modelu w wyniku modelowania odporności na rozciąganie.

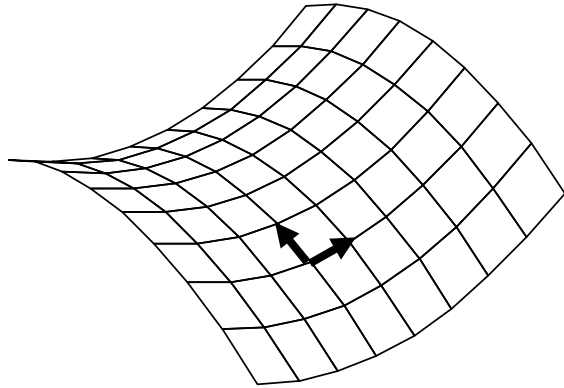
Modelowanie sił odporności na rozciąganie i zginanie powoduje, że model ma naturalną tendencję do prostowania się lub przybierania kształtu okręgu. Nie jest możliwe wybranie innego, konkretnego kształtu, do którego ma dążyć model w przypadku braku oddziaływań obrazu.

Modelowanie sił odporności na rozciąganie i zginanie za pomocą pochodnych pierwszego i drugiego rzędu uniemożliwia obliczenie takich oddziaływań dla punktów brzegowych konturów otwartych. Punkty takie muszą być traktowane w sposób specjalny.

Nie został zinterpretowany wpływ składników modelujących odporność na zginanie i rozciąganie w aspekcie postrzegania kształtu przez ludzi. Różnice pomiędzy dwoma oddziaływaniami są zbyt subtelne. Wzajemny dobór parametrów  $\tau$  i  $\rho$  nie daje rzeczywistej kontroli w związku z oczekiwaniami, co do kształtu konturu wynikowego.



# Deformowalna powierzchnia



Powierzchnia jest sparametryzowana,  $\mathbf{s} = [i, j]^T$  jest wektorem dwóch parametrów. Każdy z parametrów zmienia się w pewnym zakresie liczb rzeczywistych np.  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Współrzędne każdego punktu powierzchni określa wektor  $\mathbf{v}$ .

$$\mathbf{v}(\mathbf{s}, t) = [x(\mathbf{s}, t), y(\mathbf{s}, t), z(\mathbf{s}, t)]^T$$

Wymiarowość wektora parametrów  $\mathbf{s}$  (2) jest o jeden mniejsza od wymiarowości przestrzeni wektora  $\mathbf{v}$  (3). Wymiarowość wektora  $\mathbf{v}$  jest równa wymiarowości przestrzeni analizowanego obrazu (dane objętościowe, obraz trójwymiarowy).

Składnik gęstości energii modelu odpowiedzialnej za oporności na rozciąganie i na zginanie jest modelowana równaniem membrany.

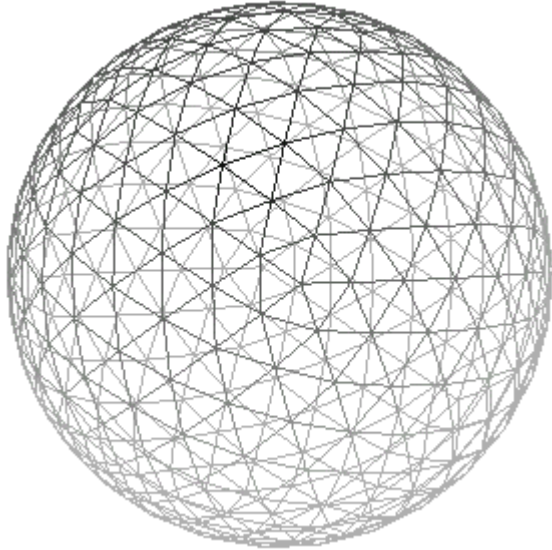
$$E_{\text{int}} = \tau \left[ \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial i} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial j} \right|^2 \right] + \rho \left[ \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial i^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial i \partial j} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial j^2} \right|^2 \right]$$

W implementacji komputerowej przestrzeń parametrów poddawana jest dyskretyzacji.

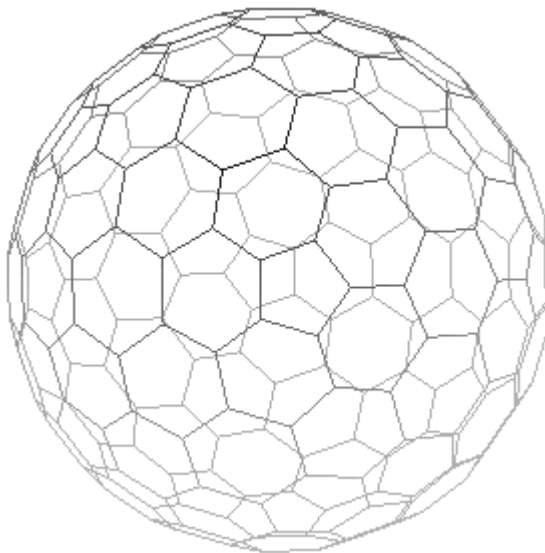
W modelu deformowalnej powierzchni występują podobne problemy jak w przypadku aktywnego konturu.



# Deformowalna powierzchnia



Aby możliwe było zamknięcie powierzchni (w postaci dyskretnej) należy wprowadzić niejednorodności w schemacie połączeń punktów modelu dyskretnego.



Punkty takie muszą być traktowane w sposób specjalny z punktu widzenia obliczeń oporności na rozciąganie i zginanie.



# Deformowane wzorce

## Dopasowanie (rejestracja) obrazów

Model jest płaszczyzną sparametryzowaną,  $\mathbf{s} = [i, j]^T$  jest wektorem dwóch parametrów. Każdy z parametrów zmienia się w pewnym zakresie liczb rzeczywistych np.  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Współrzędne każdego punktu powierzchni określa wektor  $\mathbf{v}$ .

$$\mathbf{v}(\mathbf{s}, t) = [x(\mathbf{s}, t), y(\mathbf{s}, t)]^T$$

Wymiarowość wektora parametrów  $\mathbf{s}$  (2) jest równa wymiarowości przestrzeni wektora  $\mathbf{v}$  (2).

Wymiarowość wektora  $\mathbf{v}$  jest równa wymiarowości przestrzeni analizowanego obrazu.



# Deformowane wzorce

## Dopasowanie (rejestracja) obrazów

Składnik gęstości energii modelu odpowiedzialnej za oporności na rozciąganie i na zginanie w większości zastosowań do kompresji wideo nie występuje.

W zastosowaniach dotyczących dopasowania (rejestracji) obrazów, obrazy dopasowuje się w sposób „na sztywno” (dopuszczalny obrót i przesunięcie) albo z wykorzystaniem transformacji afinicznej lub perspektywicznej. Możliwe jest też dopasowanie elastyczne bez ograniczeń dotyczących zmiany kształtu znanych z modeli deformowalnych. Brakuje jest możliwości doboru stopnia oporności na zniekształcenia.

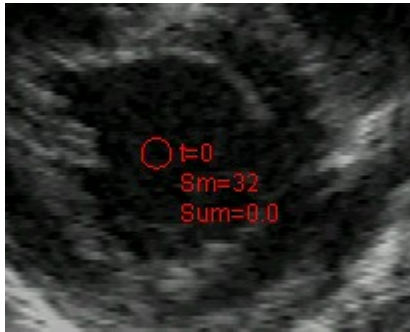
Modelowanie oporności na rozciąganie i na zginanie za pomocą równania membrany jest możliwe, ale wiąże się z koniecznością rozwiązania problemu specjalnego traktowania punktów brzegowych.



# Modele deformowalne parametryczne (topologie połączeń sieci)

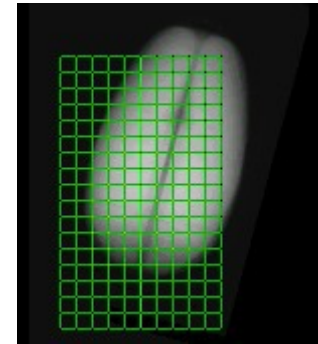
Modele deformowalne parametryczne

Kontur



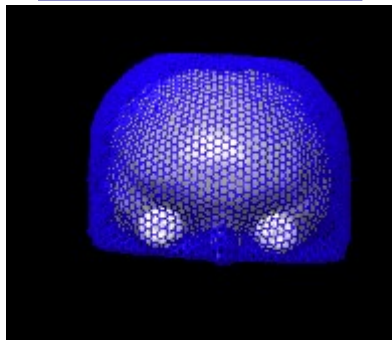
źródło: własne

Sieć 2W



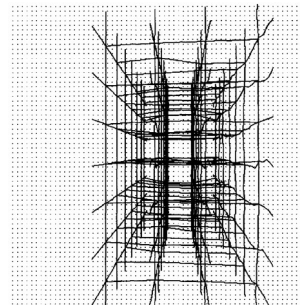
źródło: własne

Powierzchnia



źródło: własne

Sieć 3W



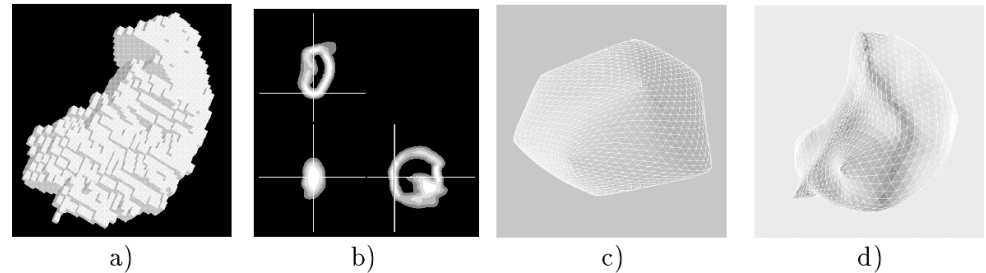
A.A.Amini, P.Shi, R.T.Constable,  
K.Johnson; *Energy-minimizing  
deformable grids for tracking tagged MR  
cardiac images*; Computers in Cardiology  
1992

Figure 4: Figure illustrates the algorithm's performance in both locating and tracking the simulated tags for the first 4 frames of the simulated sequence. Note that the located grids in successive frames are ordered from left to right. The tracked grid crossings are displayed with lines connecting the found grids at different times and are also drawn from left to right.



# Velcro Surfaces

- × Siatka regularna
- × Deformacja obliczana na podstawie pochodnych drugiego rzędu
- × Problem punktów brzegowych i nieregularności



**Figure 6:** a) The original dataset used as an example to illustrate the segmentation process. b) Tool for the selection of fix points in the dataset to be segmented. c) Initial surface resulting from the force-free solution of the homogeneous system of Euler-Lagrange differential equations, and its refined triangulation. d) The final result of the surface evolution, governed by the progressive turning on of the image potential forces. Note, that the resulting surface is smooth, but features which are selected by the user as anchor-points are preserved.

$$E_D(\vec{v}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha(s) \left| \frac{\partial \vec{v}(s, t)}{\partial s} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{\partial^2 \vec{v}(s, t)}{\partial s^2} \right|^2 ds$$

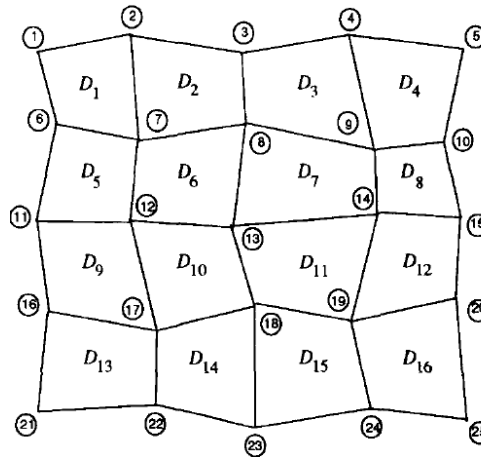
$$E_D(\vec{v}) = \iint_{\Omega} \tau(\omega) \left[ \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial \omega_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial \omega_2} \right|^2 \right] + \rho(\omega) \left[ \left| \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \omega_1^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \omega_2^2} \right|^2 \right] d\omega$$

W Neuenschwander, G Szekely; *From ziplock snakes to velcro surfaces; in Automatic Extraction of Man-Made Objects from Aerial...*; 1996

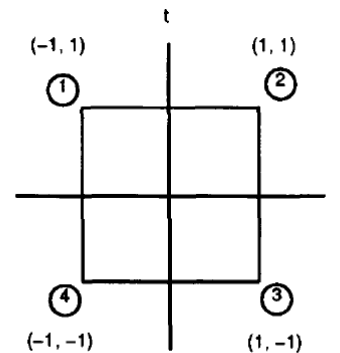


# Aktywna siatka

- ✗ Siatka regularna
- ✗ Deformacja obliczana na podstawie porównania kształtu oczka z elementem wzorcowym (*master element*)
- ✗ Wykorzystanie macierzy transformacji lokalnej (Jakobianu) oraz funkcji kształtu
- ✗ Nie można stosować do siatek nieregularnych



$$J_m(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_m}{\partial s} & \frac{\partial \eta_m}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi_m}{\partial t} & \frac{\partial \eta_m}{\partial t} \end{vmatrix} = \sum_k \frac{\partial \tilde{\phi}_k}{\partial s} x_{n(m,k)} \sum_k \frac{\partial \tilde{\phi}_k}{\partial t} y_{n(m,k)} - \sum_k \frac{\partial \tilde{\phi}_k}{\partial t} x_{n(m,k)} \sum_k \frac{\partial \tilde{\phi}_k}{\partial s} y_{n(m,k)}$$



The master element for quadrilateral elements: a square.

Y.Wang, O.Lee; *Active mesh-a feature seeking and tracking image sequence representation scheme*; *IEEE Transactions on image processing*; 1994





# Wzorce geometryczne

- ✗ Siatka regularna
- ✗ Deformacja obliczana na podstawie porównania kształtu oczka z elementami wzorcowym (geometrical templates)
- ✗ Nie można stosować do siatek nieregularnych

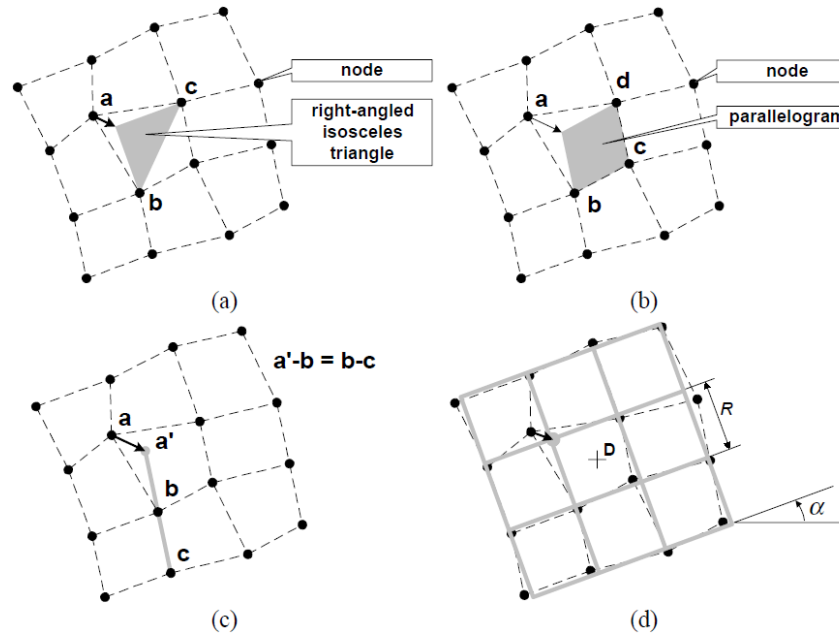
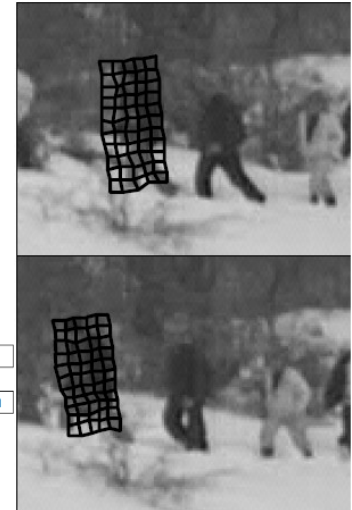


Fig.2. Geometrical templates for tension calculation.

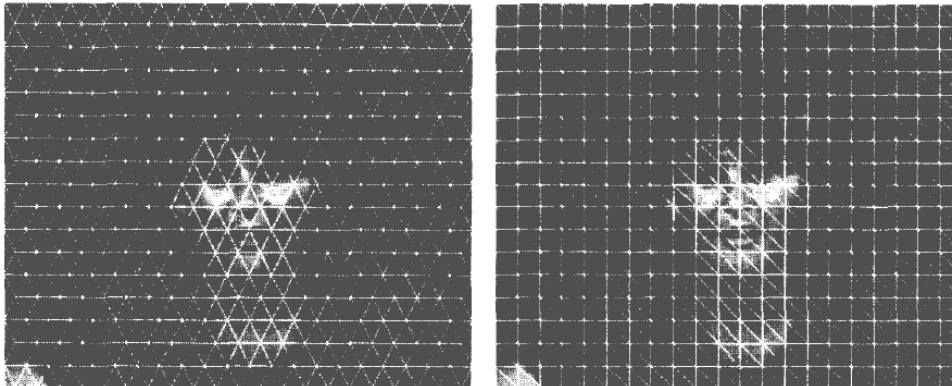


P.Szczypiński, A.Materka; *Object Tracking and Recognition Using Deformable Grid with Geometrical Templates*; ICSES 2000



# Kompresja wideo

- × Siatka regularna
- × Proces oczyszczania (refinement) wykorzystujący rozwinięcie wektorowego pola ruchu na szereg Taylora
- × Problem punktów brzegowych



Y.Nakaya, H.Harashima; *Motion compensation based on spatial transformations*; IEEE Transactions on circuits and systems for video, 1994

The refinement in step (b) is described as

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, y) &= \hat{u}^c(x, y) + \hat{u}^r(x, y) \\ \hat{v}(x, y) &= \hat{v}^c(x, y) + \hat{v}^r(x, y)\end{aligned}\quad (39)$$

where  $(\hat{u}(x, y), \hat{v}(x, y))$  is the estimated motion vector field, and  $(\hat{u}^r(x, y), \hat{v}^r(x, y))$  is the refinement vector field. Using the estimated motion vector field, the *displaced frame difference*, DFD, is defined as

$$\text{DFD}(x, y, \hat{u}, \hat{v}) = I_n(x, y) - \tilde{I}_{n-1}(x - \hat{u}, y - \hat{v}). \quad (40)$$

Assuming that the refinement vector  $(\hat{u}^r, \hat{v}^r)$  in (39) is small, (40) is rewritten using Taylor's expansion as

$$\begin{aligned}\text{DFD}(x, y, \hat{u}, \hat{v}) &= \text{DFD}(x, y, \hat{u}^c, \hat{v}^c) \\ &+ \hat{u}^r \frac{\partial}{\partial x} \tilde{I}_{n-1}(x - \hat{u}^c, y - \hat{v}^c) \\ &+ \hat{v}^r \frac{\partial}{\partial y} \tilde{I}_{n-1}(x - \hat{u}^c, y - \hat{v}^c) + \epsilon\end{aligned}\quad (41)$$

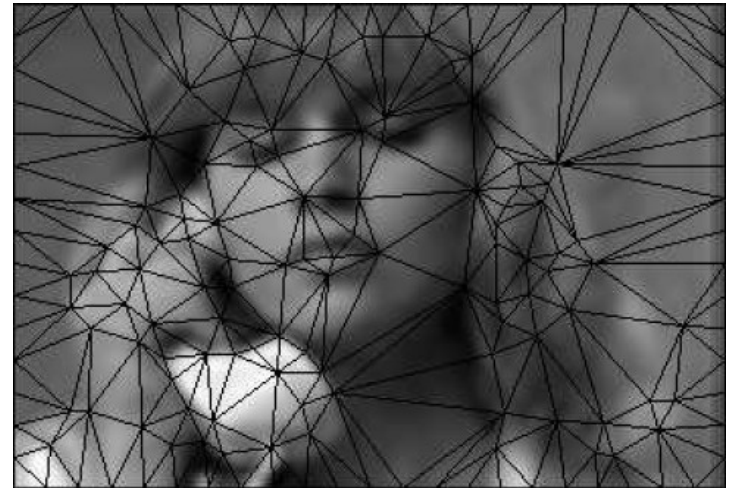
where  $\epsilon$  denotes the higher order terms in  $\hat{u}^r$  and  $\hat{v}^r$ . Using (41), the *estimated mean square error*, EMSE, is defined as

$$\begin{aligned}\text{EMSE} &= \frac{1}{N} \sum_{(x, y) \in S_I} \left( \text{DFD}(x, y, \hat{u}^c, \hat{v}^c) \right. \\ &+ \hat{u}^r \frac{\partial}{\partial x} \tilde{I}_{n-1}(x - \hat{u}^c, y - \hat{v}^c) \\ &+ \left. \hat{v}^r \frac{\partial}{\partial y} \tilde{I}_{n-1}(x - \hat{u}^c, y - \hat{v}^c) \right)^2\end{aligned}\quad (42)$$



# Siatki nieregularne w kompresji wideo

- × Siatka nieregularna z arbitralnie wyznaczonymi punktami węzłowymi
- × Brak obliczania naprężeń
- × Brak ograniczenia stopnia deformacji



## 2.4. Triangulation and Affine Transformation

As in the spatial-domain triangle-mesh ME/MC of [5], after the control points are selected in the reference frame and their motion is tracked to the current frame, triangle meshes are computed using Delaunay triangulation. A single triangle mesh is used for all subbands in the RDWT of a frame, as depicted in Fig. 3 (only the HL subbands are shown); this is possible since each RDWT subband has the same size. MC proceeds by mapping each triangle in the current frame backwards to the previous frame using an affine six-parameter model as described in [8]; this affine mapping is performed for the triangles in each subband separately.

Suxia Cui, Yonghui Wang, and James E. Fowler;  
*Mesh-based Motion Estimation and Compensation...*;  
IEEE International Conference on Image Processing,  
2002





# Dopasowanie ze zmienną elastycznością

- × Pierwszy etap dopasowanie sztywne (*rigid*)
- × Drugi etap dopasowanie elastyczne

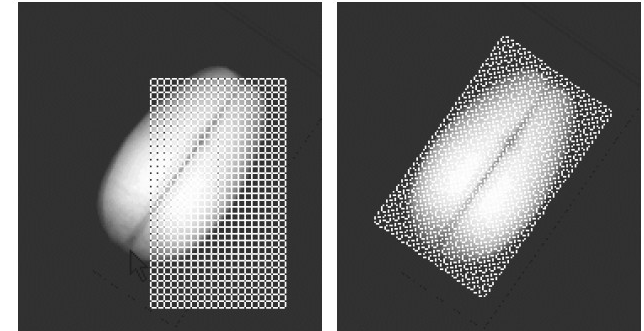


Fig.5. Application of quasi-elastic model (rectangular graph)

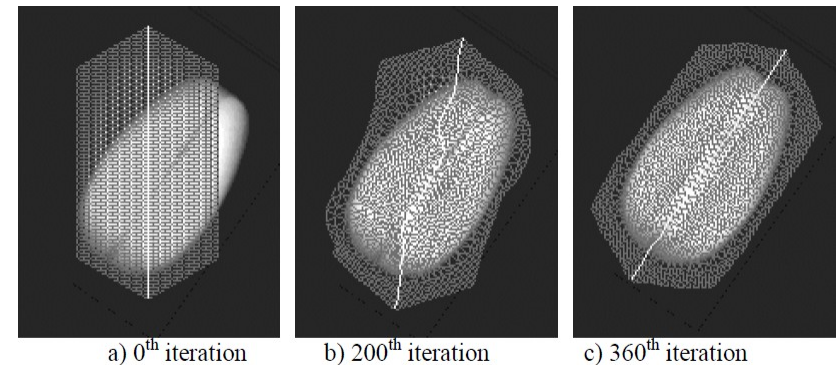


Fig.3. Matching process of rotated object

P. Szczypiński, A. Materka, *Variable-Flexibility Elastic Model for Digital Image Analysis*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences; 1999



# Cel

## Opracowanie metody obliczania deformacji:

- × siatki modeli parametrycznych arbitralnie nieregularne
- × stosowanie w metodach minimalizacji energii (modele dynamiczne)
- × płynna regulacja między dopasowaniem sztywnym i elastycznym (zmiana zasięgu oddziaływania)
- × wybór rodzaju ograniczeń deformacji (jaki rodzaj zniekształcenia jest normalny a jaki niedopuszczalny)
- × obliczenia możliwe dla punktów brzegowych
- × uniwersalność: zastosowania w analizie ruchu w wideo, zastosowanie w rejestracji obrazów, w obrazach 2W i 3W



# Metoda transformacji sąsiedztwa

## Oznaczenia

- $N_s$  –  $n$ -sąsiedztwo punktu węzłowego  $s$ ; zbiór wszystkich punktów węzłowych połączonych z  $s$  za pomocą  $n$  lub mniejszej liczby połączeń
- $\mathbf{V}_i$  – aktualne współrzędne punktu węzłowego  $i$
- $\hat{\mathbf{V}}_i$  – współrzędne punktu węzłowego  $i$  w siatce odniesienia (niezdeformowanej)

Przyjęto, że transformacja sąsiedztwa z siatki odniesienia do jego aktualnego położenia jest w przybliżeniu transformacją afiniczną:

$$i \in N_s; \mathbf{v}_i = \mathbf{J}_s \hat{\mathbf{v}}_i - \mathbf{T}_s + \mathbf{e}_i$$

- $\mathbf{J}_s$  – macierz transformacji (obrót, skalowanie, rozciągnięcie kierunkowe, przekoszenie)
- $\mathbf{T}_s$  – wektorem przesunięcia.
- $\mathbf{e}_i$  – wektor błędu między rzeczywistym położeniem punktu  $i$  a położeniem obliczonym na podstawie transformacji.



# Metoda transformacji sąsiedztwa

$\mathbf{J}$  i  $\mathbf{T}$  dla minimalnego błędu

Poszukuje się takiej macierzy oraz wektora, które minimalizują średnią kwadratów błędów dla wszystkich węzłów sąsiedztwa.

Dla przypadku przestrzeni dwuwymiarowej:

Pochodne błędu  $\varepsilon_s$  po zmiennych  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $j_{11}$ ,  $j_{12}$ ,  $j_{21}$  oraz  $j_{22}$  muszą być zerowe w jego minimum

$$\varepsilon_s = \sum_{i \in N_s} (|\mathbf{e}_i|^2) = \sum_{i \in N_s} (|\mathbf{v}_i - \mathbf{J}_s \hat{\mathbf{v}}_i - \mathbf{T}_s|^2)$$

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t_1} = 2 \sum (t_1 - x + j_{11}x + j_{12}y) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t_2} = 2 \sum (t_2 - y + j_{21}x + j_{22}y) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial j_{11}} = 2 \sum (j_{11}x^2 + j_{12}xy - x(x - t_1)) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial j_{12}} = 2 \sum (j_{12}y^2 + j_{11}xy - y(x - t_1)) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial j_{21}} = 2 \sum (j_{21}x^2 + j_{22}xy - x(y - t_2)) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial j_{22}} = 2 \sum (j_{22}y^2 + j_{21}xy - y(y - t_2)) = 0$$





# Metoda transformacji sąsiedztwa

## Rozwiązanie

Układ równań w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \sum x^2 & \sum xy & \sum x \\ \sum xy & \sum y^2 & \sum y \\ \sum x & \sum y & \sum 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{12} \\ j_{21} \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum xy \\ \sum yy \\ \sum y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sum x^2 & \sum xy & \sum x \\ \sum xy & \sum y^2 & \sum y \\ \sum x & \sum y & \sum 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{12} \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum xx \\ \sum yx \\ \sum x \end{bmatrix}$$

ma rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{12} \\ t_1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \sum xx \\ \sum yx \\ \sum x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} j_{21} \\ j_{22} \\ t_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \sum xy \\ \sum yy \\ \sum y \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\mathbf{M} = \frac{\begin{bmatrix} \sum y^2 \sum 1 - (\sum y)^2 & \sum y \sum x - \sum xy \sum 1 & \sum xy \sum y - \sum y^2 \sum x \\ \sum y \sum x - \sum xy \sum 1 & \sum x^2 \sum 1 - (\sum x)^2 & \sum xy \sum x - \sum x^2 \sum y \\ \sum xy \sum y - \sum y^2 \sum x & \sum xy \sum x - \sum x^2 \sum y & \sum x^2 \sum y^2 - (\sum xy)^2 \end{bmatrix}}{\sum x^2 \sum y^2 \sum 1 - (\sum y)^2 \sum x^2 - (\sum xy)^2 \sum 1 - (\sum x)^2 \sum y^2 + 2 \sum y \sum x \sum xy}$$



# Metoda transformacji sąsiedztwa

Energia naprężenia punktu  $s$

Składowa energii będącą wynikiem naprężenia:

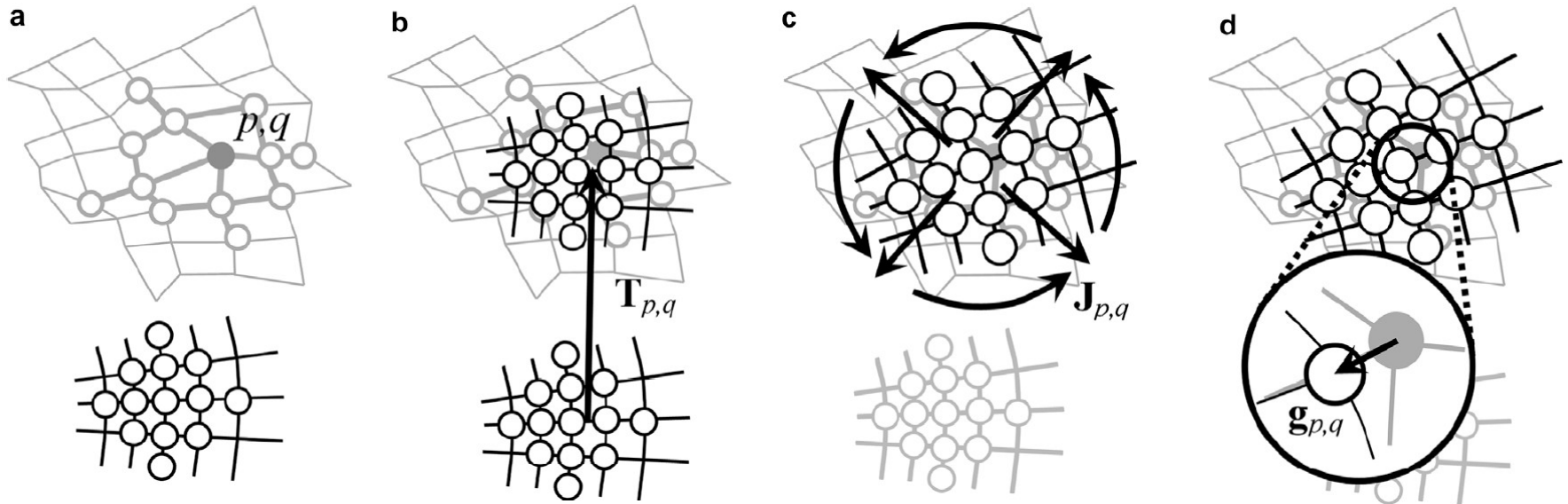
$$E(\mathbf{v}(s)) = \rho |\mathbf{v}_s - \mathbf{J}_s \hat{\mathbf{v}}_s - \mathbf{T}_s|^2$$

gdzie  $\rho$  jest parametrem.



# Metoda transformacji sąsiedztwa

Interpretacja graficzna





# Rozkład macierzy transformacji

Rozkład biegunowy (*polar decomposition*) na macierz ortonormalną  $\mathbf{U}$  i symetryczną  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{S}$$

Rozkład własny macierzy (*eigen decomposition*) na macierz diagonalną  $\mathbf{D}$  i ortonormalną  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{Q}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \sqrt{|\det \mathbf{J}|} \left( \mathbf{U}\mathbf{Q}^{-1} \frac{\mathbf{D}}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} \mathbf{Q} \right) = \\ &= \sqrt{|\det \mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$



# Modyfikacja macierzy transformacji

$$\mathbf{J} = \sqrt{|\det \mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Zachowanie pola obszaru:

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Zachowanie kierunków prostopadłych:

$$\mathbf{J}' = \sqrt{|\det \mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Zachowanie orientacji:

$$\mathbf{J}' = \sqrt{|\det \mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\sqrt{|\det \mathbf{J}|}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$



# Właściwości metody

- × Możliwość wykorzystania w siatkach nieregularnych. Konieczne jest zdefiniowanie kształtu siatki niezdeformowanej, porównawczej.
- × Możliwa jest regulacja zakresu sąsiedztwa  $n$ . Dla odpowiednio dużego  $n$  sąsiedztwo obejmuje całą siatkę i jest identyczne dla wszystkich punktów węzłowych – dopasowanie (quasi) sztywne.
- × Rozkład i modyfikacja macierzy transformacji umożliwiają wybiórcze przeciwdziałanie zmianom powierzchni, obrotowi, rozciągnięciu, przesunięciu o ile jest to uzasadnione specyficznym zastosowaniem.
- × Obliczenia naprężeń dla punktów węzłowych na brzegach siatki odbywa się w sposób naturalny.
- × Możliwość stosowania w modelach o różnej topologii, również w przestrzeni obrazów 3W (planowane testy).

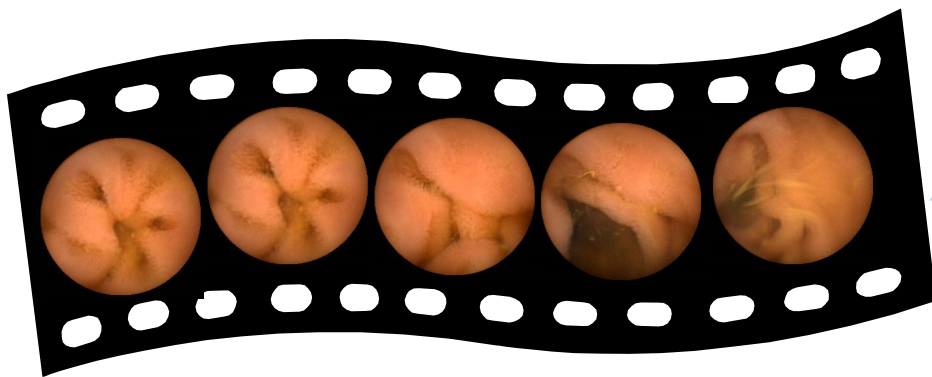


# Zastosowania

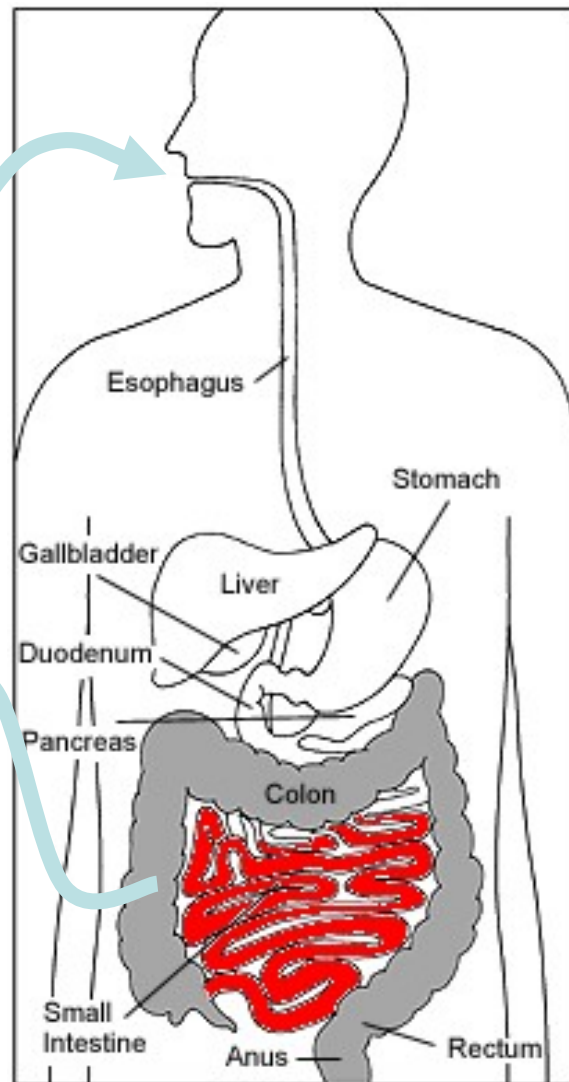
Analiza wideo z endoskopu bezprzewodowego - potrzeba



GivenImaging



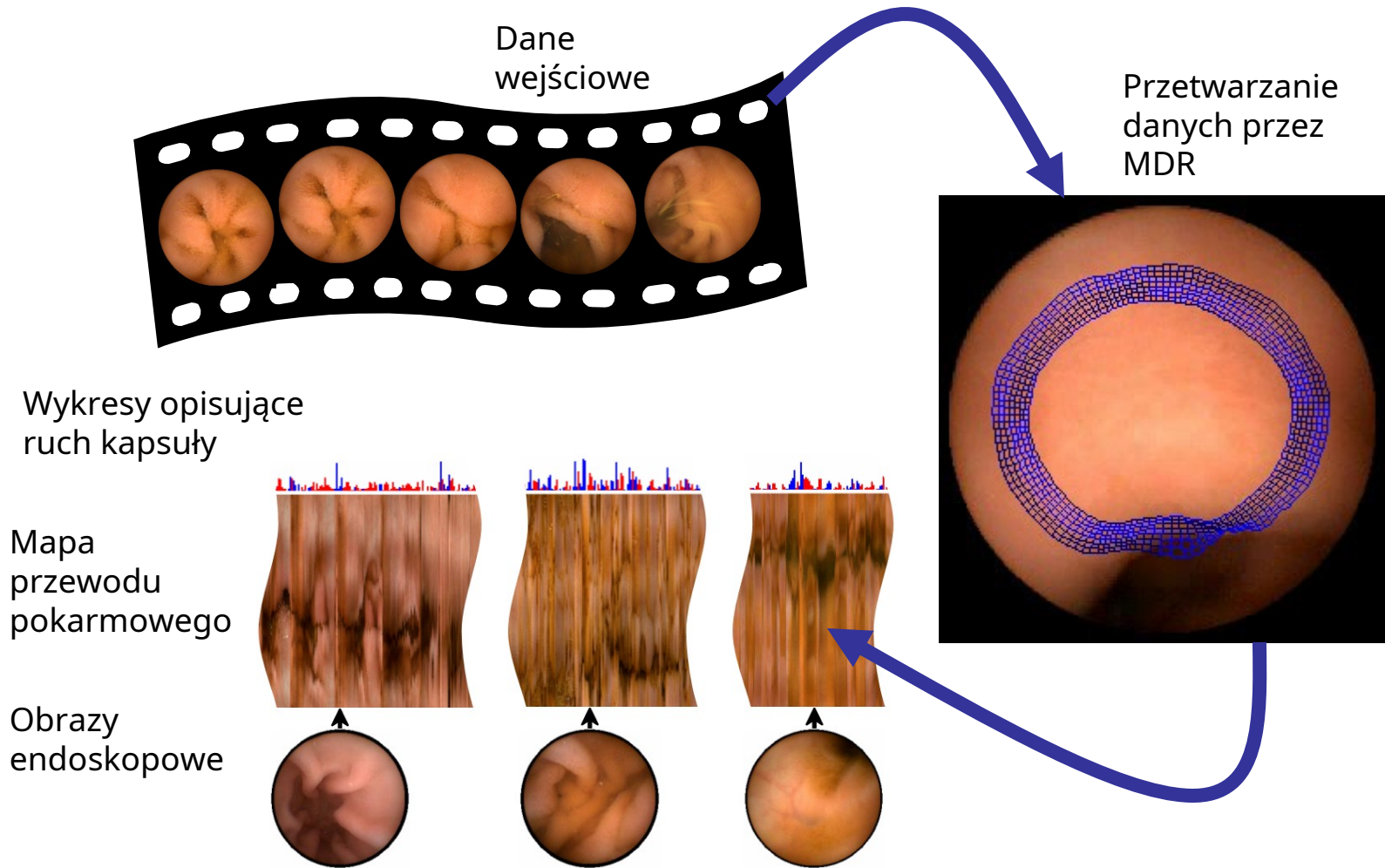
8.godziny zapis wideo, 2 klatki/s, RGB, 256×256 pikseli, koliste pole widzenia przy kącie 140°





# Zastosowania

Analiza wideo z endoskopu bezprzewodowego - metoda



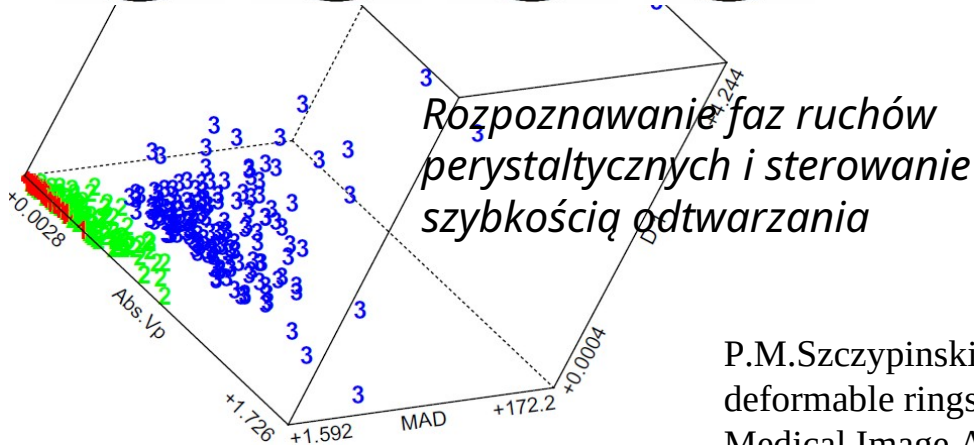
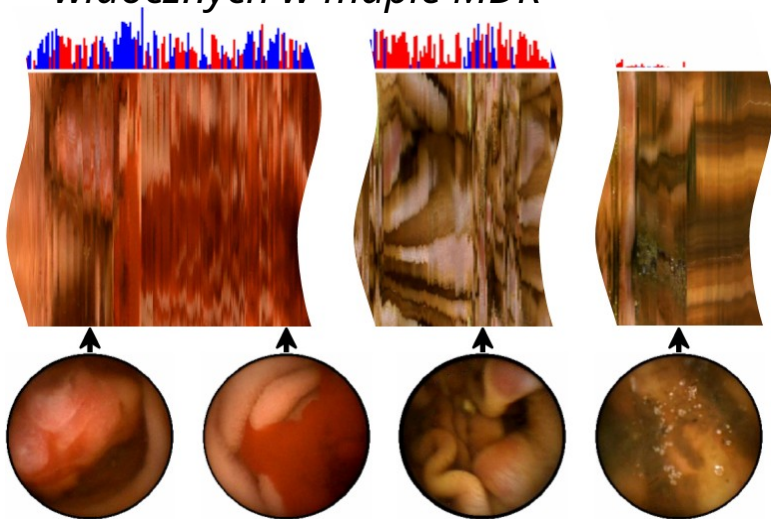




# Zastosowania

## Analiza wideo z endoskopu bezprzewodowego - wyniki

*Przykłady zmian patologicznych widocznych w mapie MDR*



*Rozpoznawanie faz ruchów perystaltycznych i sterowanie szybkością odtwarzania*

**Table 2**

Selected results of the WCE video interpretation.

Video	Expert no. 1		Expert no. 2	
	Findings	Time (min)	Findings	Time (min)
	Color bar		MDR map	
1	9	54	11	38
2	11	32	12	11
3	18	38	6	18
4	22	55	12	24
5	10	35	11	11
	MDR map		Color bar	
6	24	44	14	25
7	55	49	25	45
8	14	40	4	19
9	8	65	16	34
10	28	60	18	30

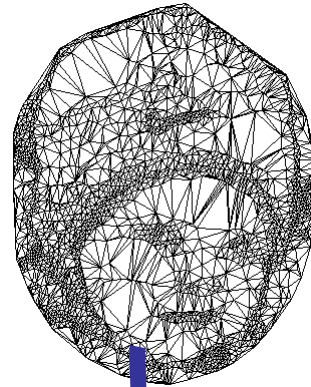
*Badanie czasu potrzebnego do przeprowadzenia interpretacji z zastosowaniem i bez zastosowania metody*

P.M.Szczypinski, R.D.Sriram, P.V.J. Sriram, D.N.Reddy, A model of deformable rings for interpretation of wireless capsule endoscopic videos, Medical Image Analysis, 2009



# Zastosowania

Rejestracja obrazów za pomocą siatki nieregularnej



Tworzenie siatki:

- × Generowanie punktów o gęstości zależnej od mapy gradientowej obrazu
- × Triangulacja Delone (Delauney)  
*Борис Николаевич Делоне*



-15° x1.15



# Zastosowania

## Przyszłe prace

- × Zastosowanie metody do rejestracji dwuwymiarowych obrazów medycznych,
- × Oprogramowanie metody dla przypadku przestrzeni trójwymiarowej,
- × Zastosowanie w rejestracji trójwymiarowych obrazów medycznych z siatką przestrzenną.