



Technical University of Lodz

Institute of Electronics

Wybrane zastosowania macierzy Hessego w analizie obrazów

Piotr M. Szczypiński

Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej



Szkoła Inżynierii Systemów Biotechnicznych

14 września 2023

Jakby tu zacząć?

Macierz Hessego [edytuj]

🌐 28 języków ▾

Artykuł Dyskusja

Czytaj Edytuj Edytuj kod źródłowy Wyświetl historię Narzędzia ▾

Hesjan, **macierz Hessego** – **macierz (kwadratowa)** drugich **pochodnych cząstkowych** funkcji o **wartościach rzeczywistych** dwukrotnie **różniczkowalnej** w pewnym punkcie dziedziny. Czasem pod pojęciem hesjanu rozumie się **wyznacznik** macierzy Hessego, będący **formą kwadratową** przyrostów zmiennych^[1]. Jest on używany przy znajdowaniu **ekstremów funkcji wielu zmiennych**.

Nazwę hesjanu wprowadził **James Joseph Sylvester** dla upamiętnienia **niemieckiego** matematyka **Otona Hessego** (1811–1874)^[2].

Definicja [edytuj | edytuj kod]

Niech D będzie **niepustym**, **otwartym podzbiorem** \mathbb{R}^n oraz $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna w $x_0 \in D$. **Macierzą Hessego** funkcji f w punkcie x_0 nazywamy macierz

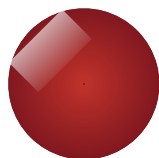
$$H(x_0) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}.$$

https://pl.wikipedia.org/wiki/Macierz_Hessego

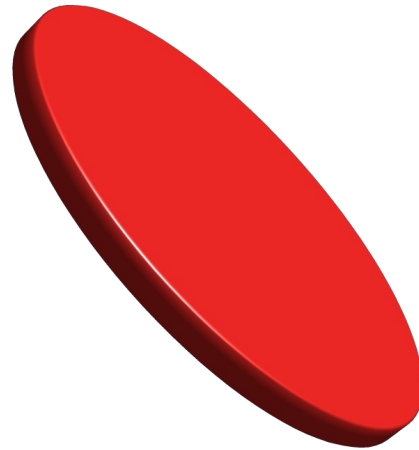


Co zjemy na obiad?

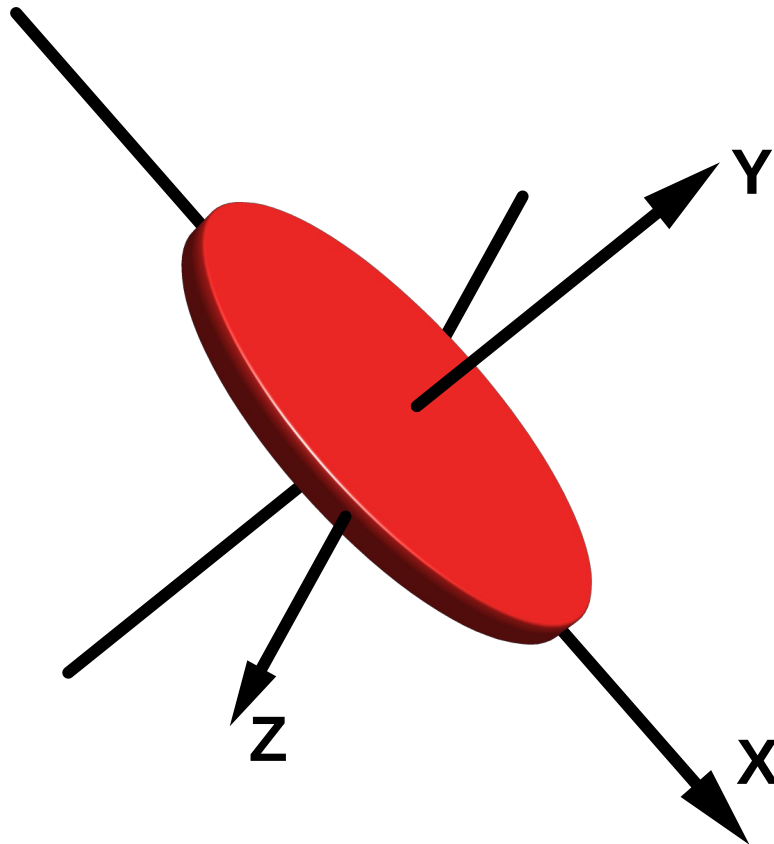




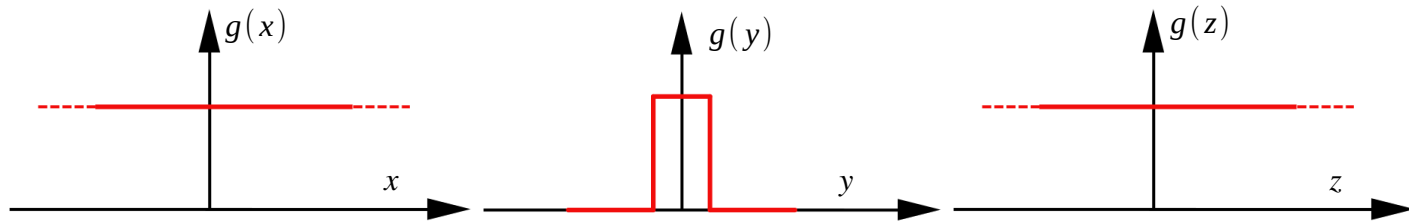
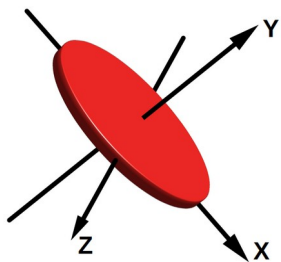
Analiza w trzech kierunkach



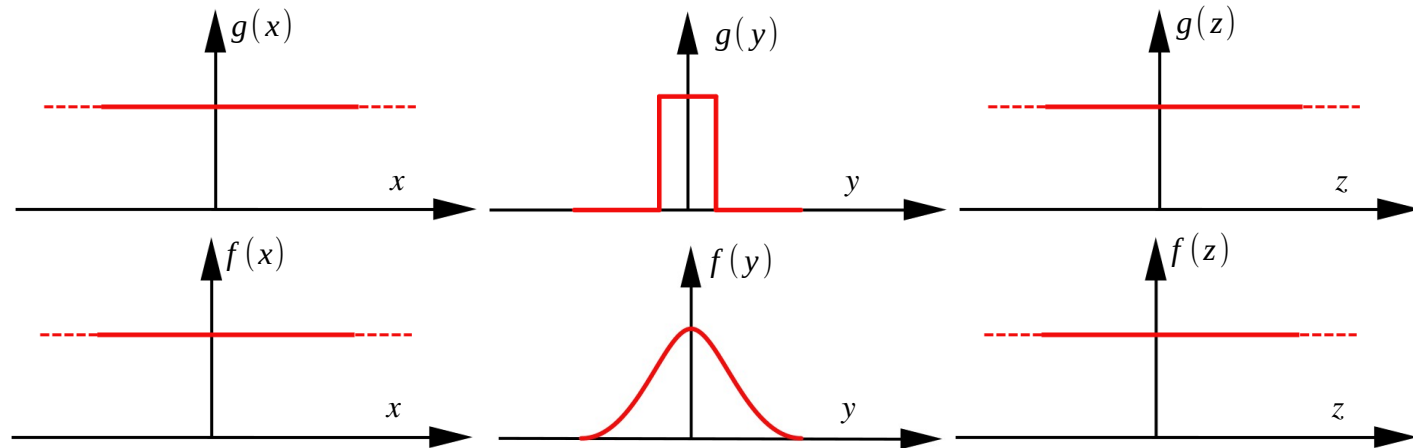
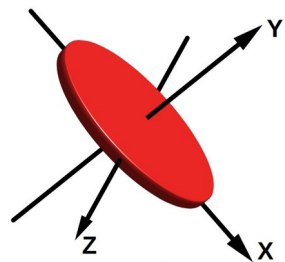
Analiza w trzech kierunkach



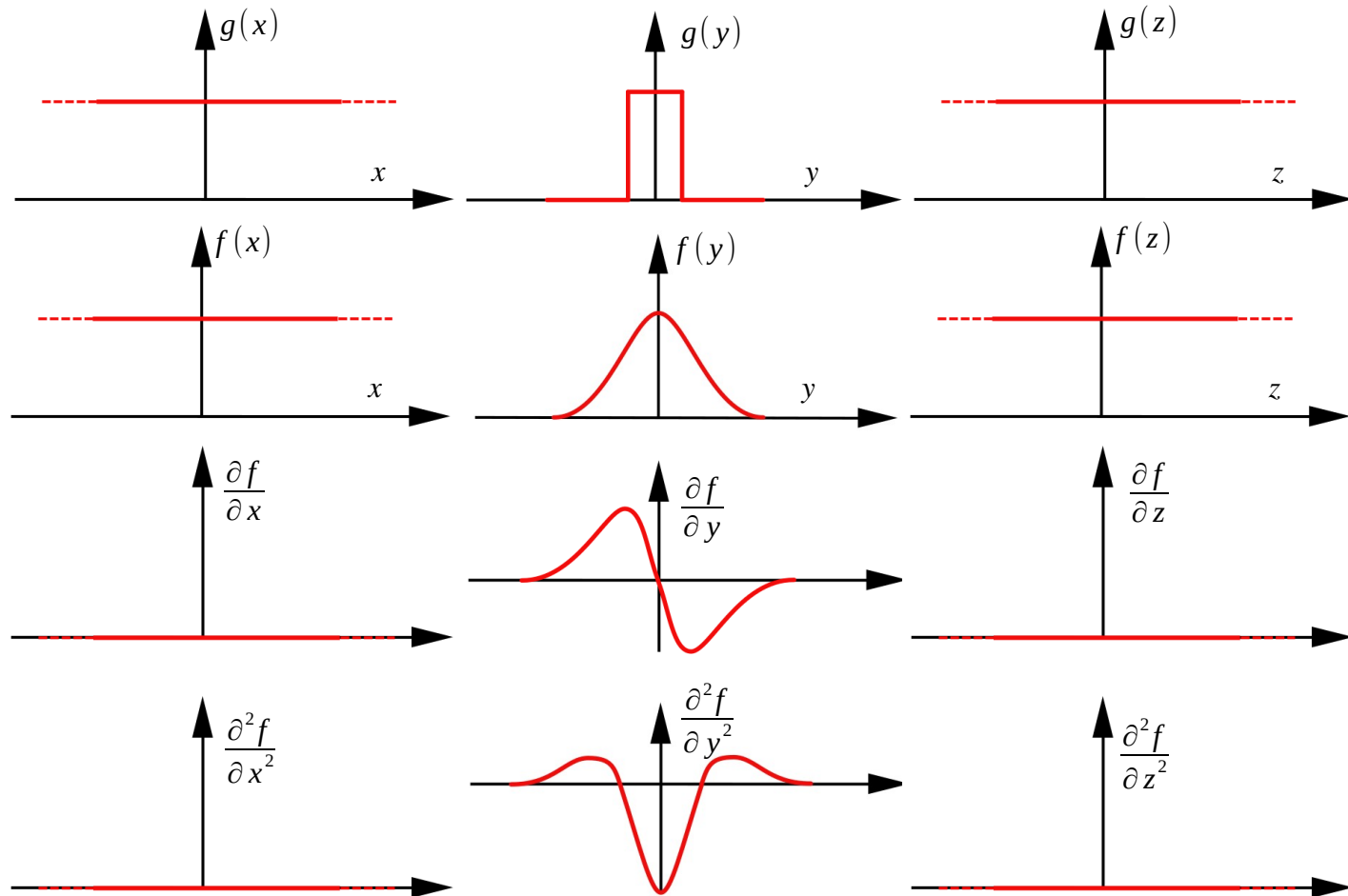
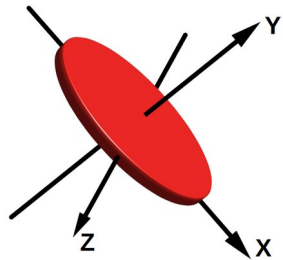
Analiza w trzech kierunkach



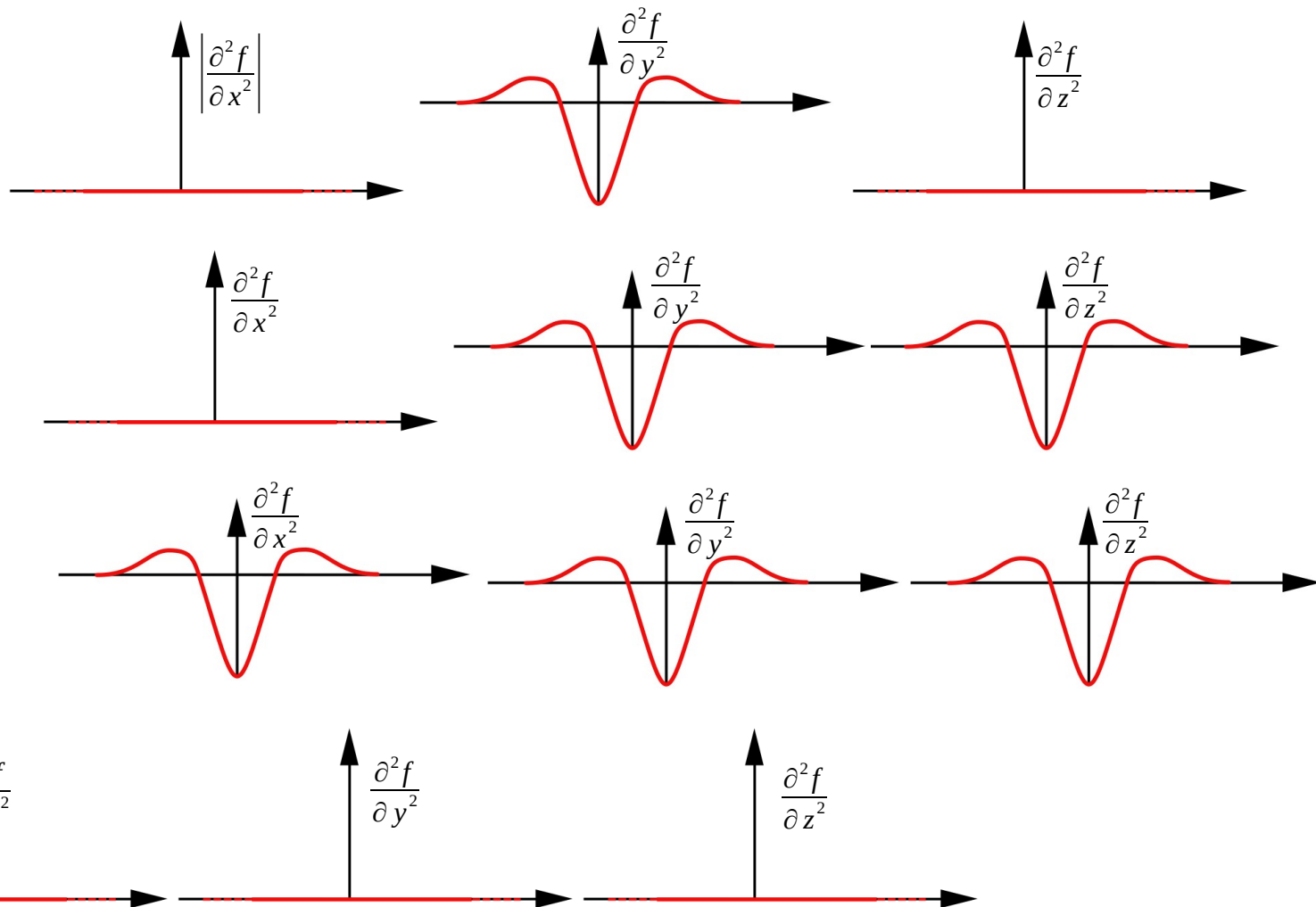
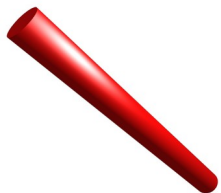
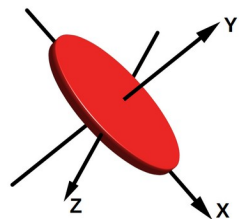
Dodajemy proszek do pieczenia



Obliczamy pochodne

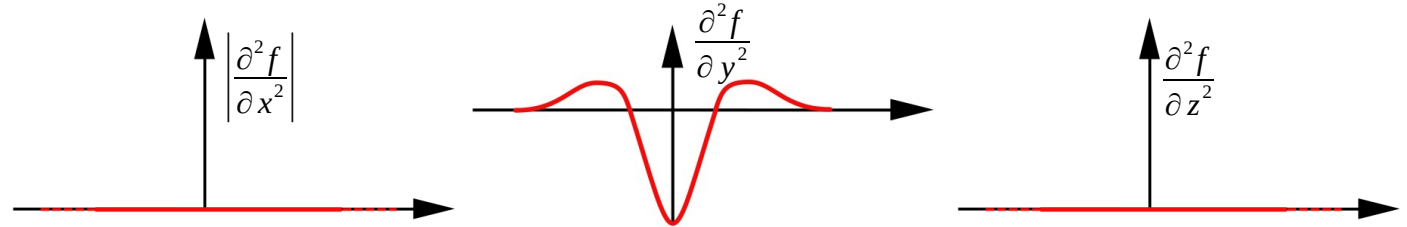
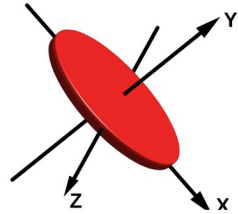


Obliczamy pochodne

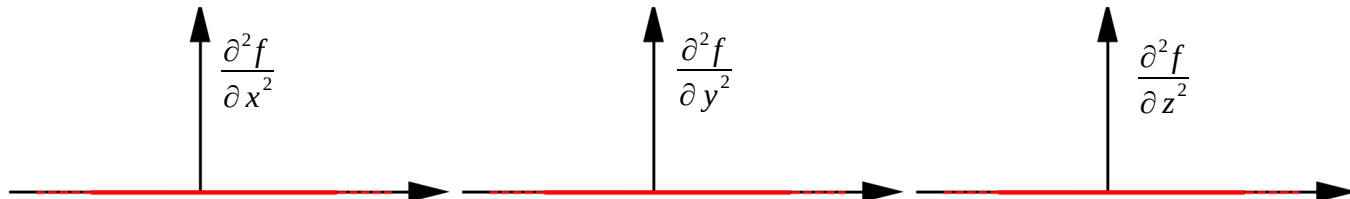




Obliczamy pochodne

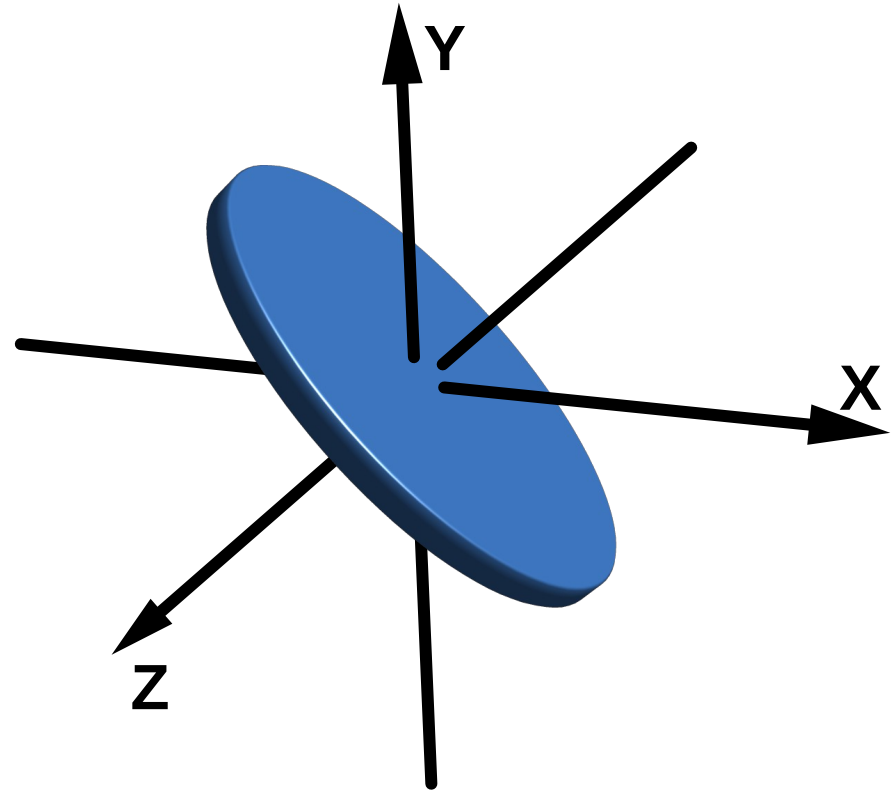
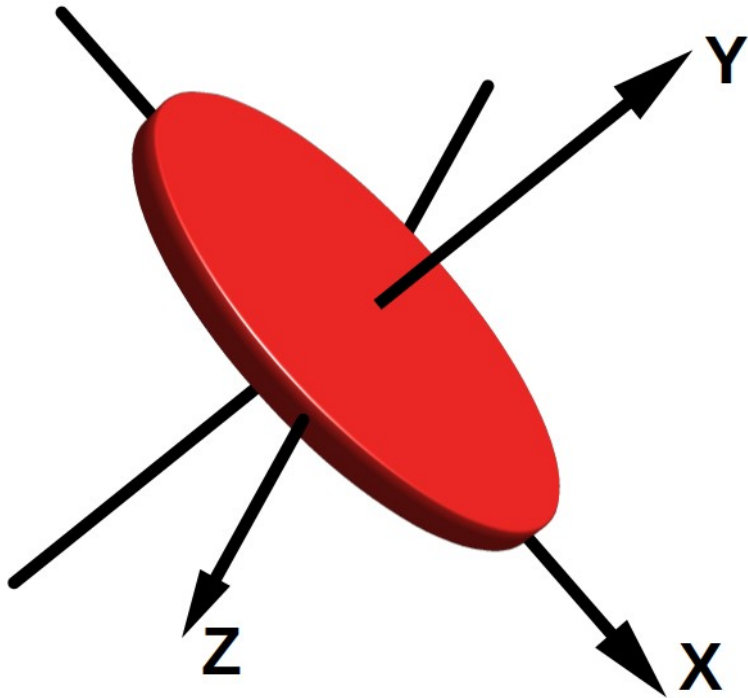


	Wartość bezwzględna drugiej pochodnej		
Naleśnik	duża	mała	mała
Spaghetti	duża	duża	mała
Knedel	duża	duża	duża
Nic	mała	mała	mała

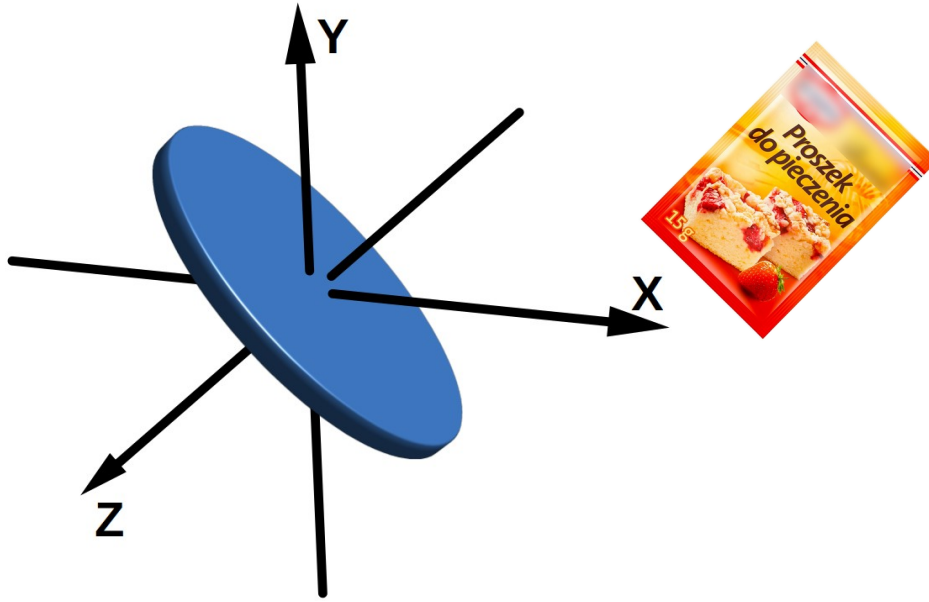




Dowolna orientacja naleśnika



Macierz Hessego (Hessian)



$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$



Macierz Hessego (Hessian)

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$



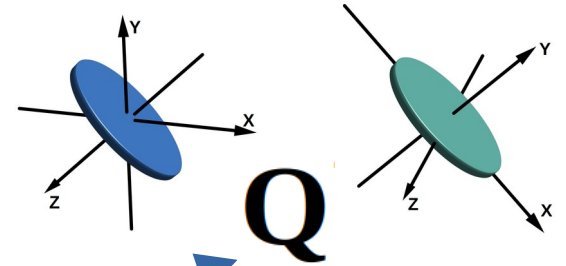
	Wartość bezwzględna drugiej pochodnej		
Naleśnik	duża	mała	mała
Spaghetti	duża	duża	mała
Knedel	duża	duża	duża
Nic	mała	mała	mała

Rozkład własny macierzy

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{H} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1}$$



	Wartość bezwzględna wartości własnej macierzy H		
Naleśnik	duża	mała	mała
Spaghetti	duża	duża	mała
Knedel	duża	duża	duża
Nic	mała	mała	mała



Dowolna orientacja makaronu i naleśnika

Macierz Hessego [\[edytuj\]](#)

🌐 28 języków ▾

Artykuł [Dyskusja](#)

[Czytaj](#) [Edytuj](#) [Edytuj kod źródłowy](#) [Wyświetl historię](#) [Narzędzia ▾](#)

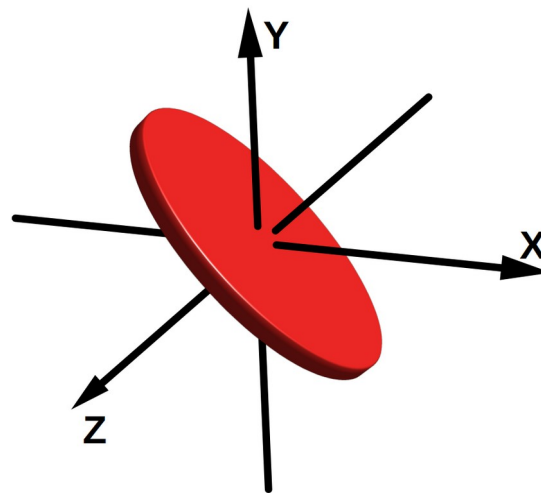
Hesjan, macierz Hessego – macierz (kwadratowa) drugich pochodnych cząstkowych funkcji o wartościach rzeczywistych dwukrotnie różniczkowalnej w pewnym punkcie dziedziny. Czasem pod pojęciem hesjanu rozumie się wyznacznik macierzy Hessego, będący formą kwadratową przyrostów zmiennych^[1]. Jest on używany przy znajdowaniu ekstremów funkcji wielu zmiennych.

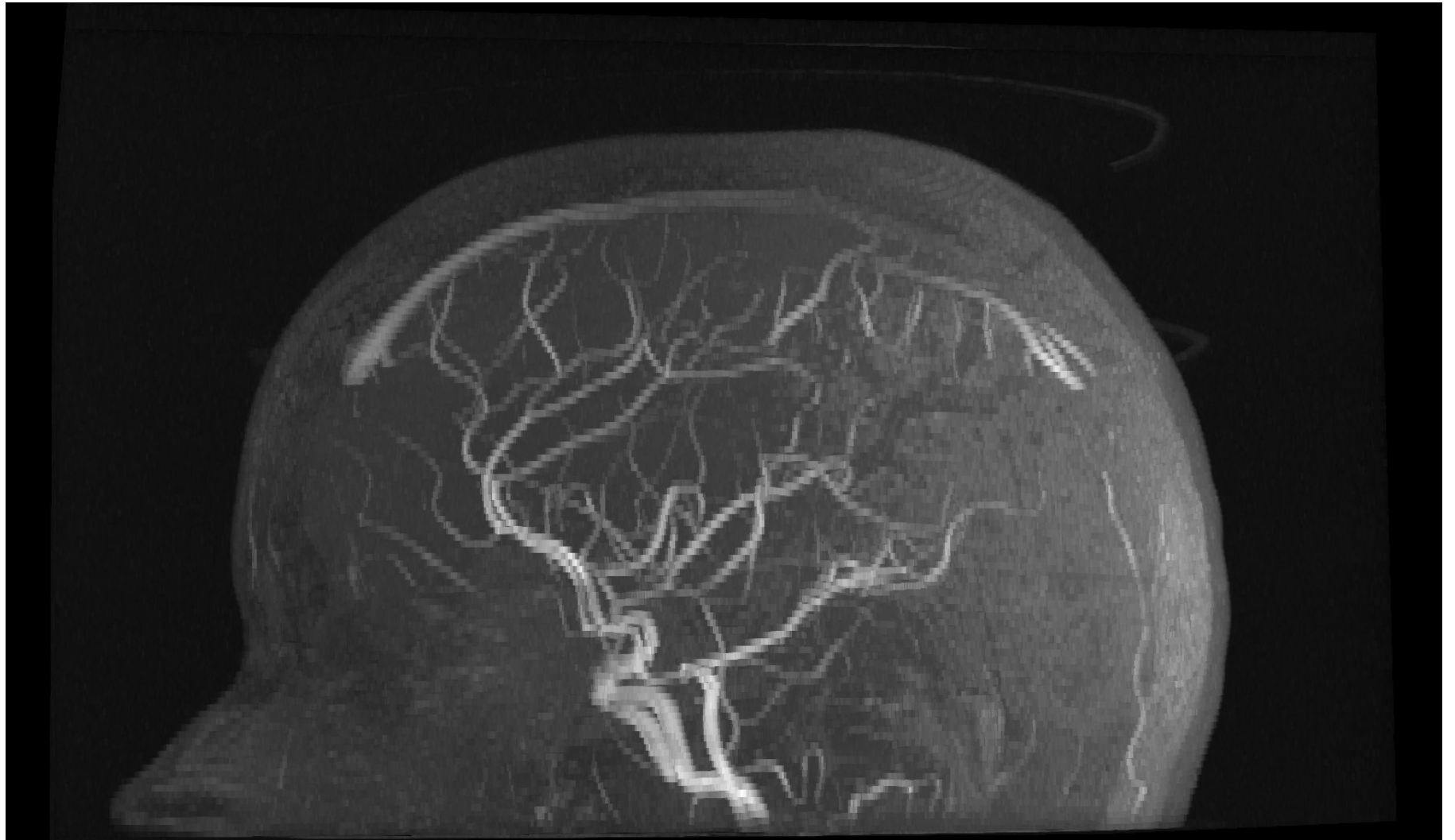
Nazwę hesjanu wprowadził James Joseph Sylvester dla upamiętnienia niemieckiego matematyka Ottona Hessego (1811–1874)^[2].

Definicja [\[edytuj\]](#) | [edytuj kod](#)

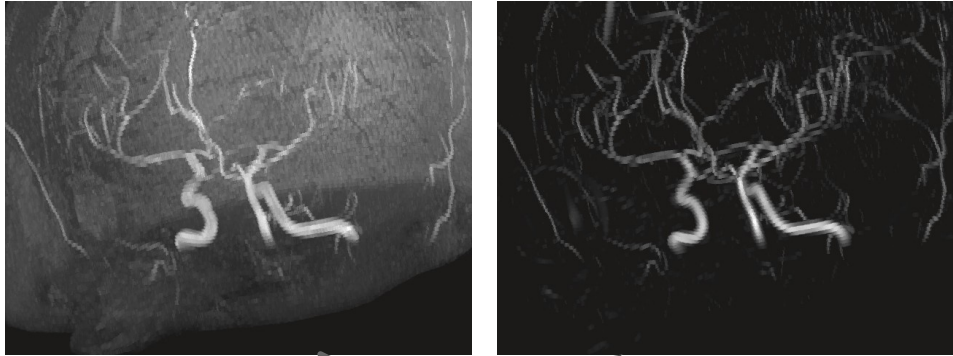
Niech D będzie niepustym, otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n oraz $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna w $x_0 \in D$. Macierzą Hessego funkcji f w punkcie x_0 nazywamy macierz

$$H(x_0) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}.$$









Vesselness function
Funkcja unaczynienia

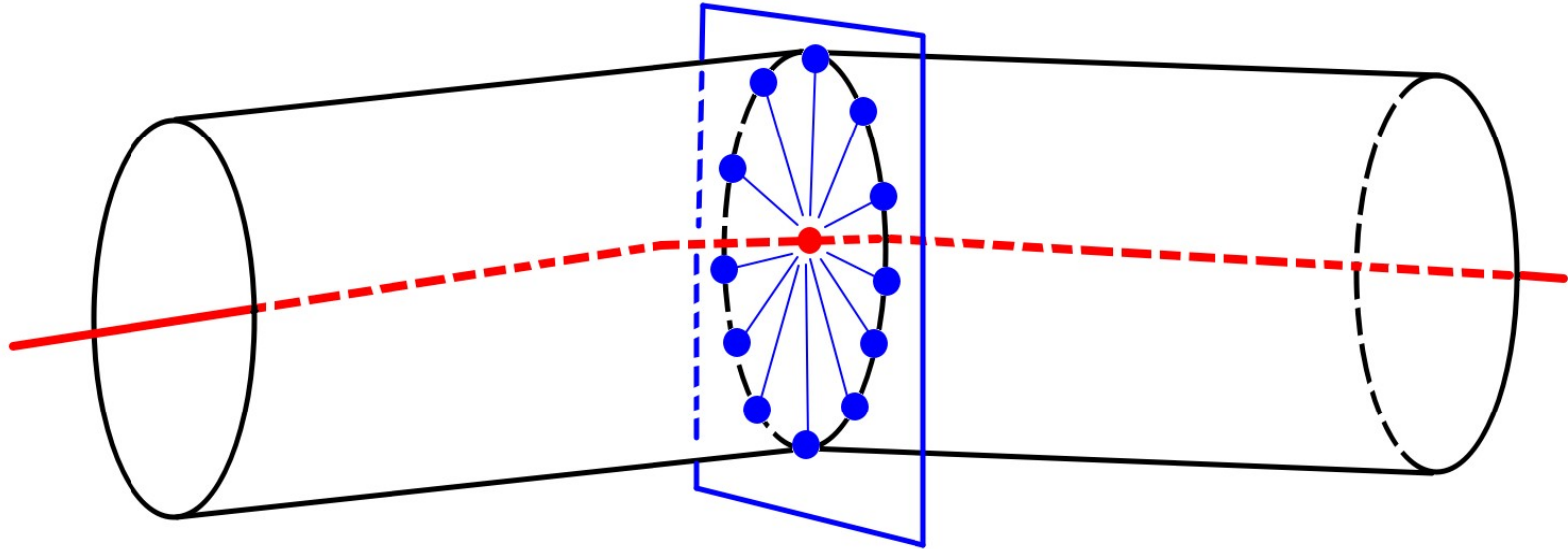
ANTIGA, Luca. Generalizing vesselness with respect to dimensionality and shape. *The Insight Journal*, 2007, 3: 1-14.

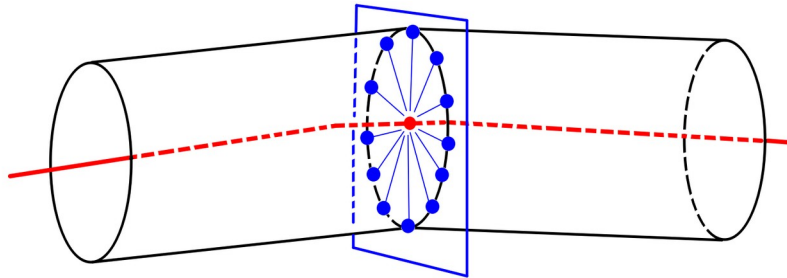
FRANGI, Alejandro F., et al. *Multiscale vessel enhancement filtering*. In: *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention—MICCAI'98: First International Conference Cambridge, MA, USA, October 11–13, 1998 Proceedings 1*. Springer Berlin Heidelberg, 1998. p. 130-137.

SATO, Yoshinobu, et al. *3D multi-scale line filter for segmentation and visualization of curvilinear structures in medical images*. In: *International Conference on Computer Vision, Virtual Reality, and Robotics in Medicine*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997



Próbkowanie promienia (*Ray-casting*)

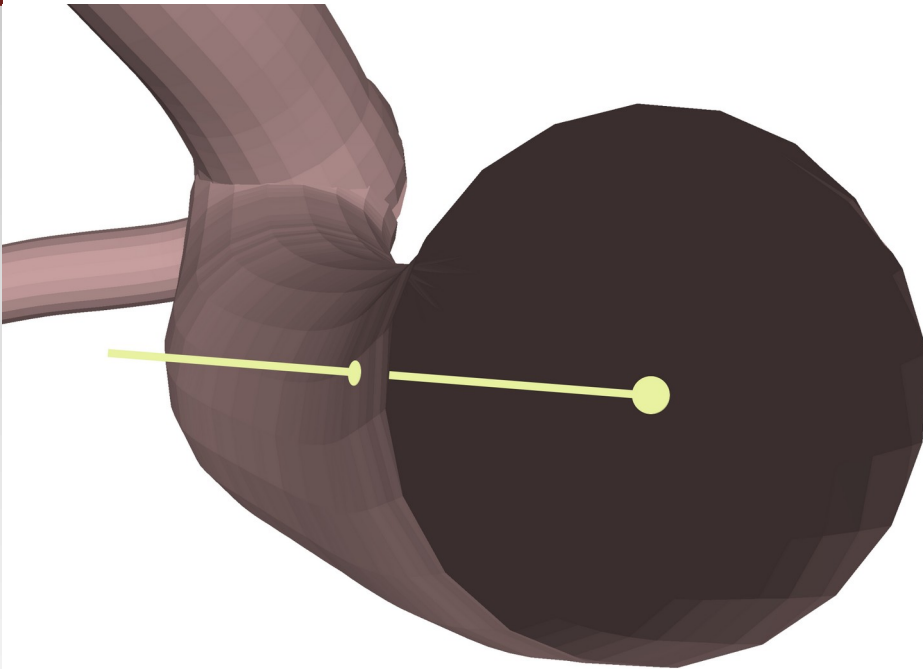




Wymagania:

1. Linia środkowa (punkt środkowy + orientacja),
2. Znalezienie przekroju prostopadłego do linii środkowej,
3. Lokalizacja ścianki naczynia.

Lokalizacja ścianki

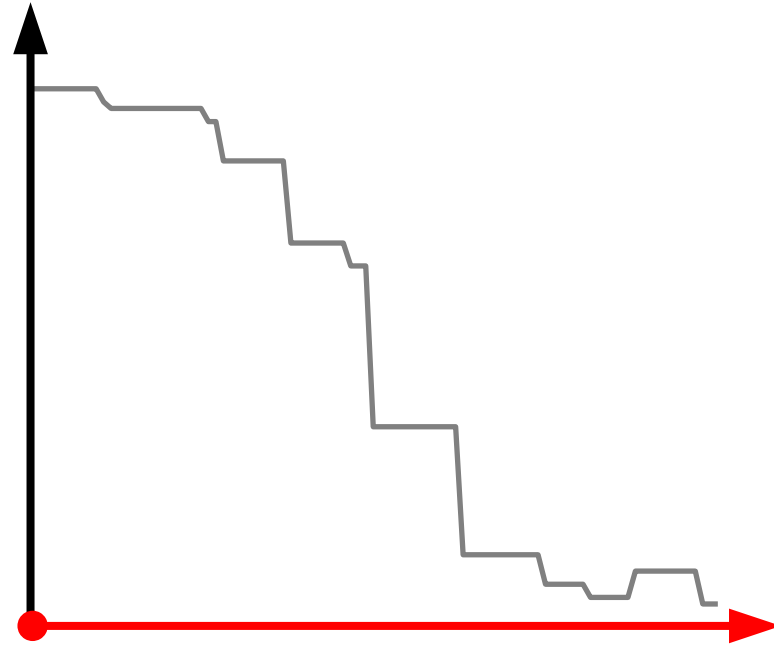
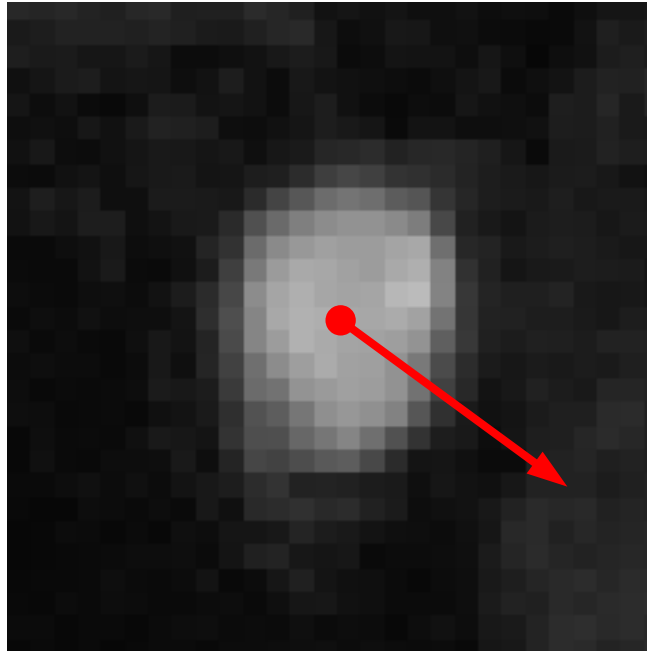


Wymagania:

1. Model trójwymiarowy,
2. Znalezienie punktu przecięcia promienia ze ścianką.



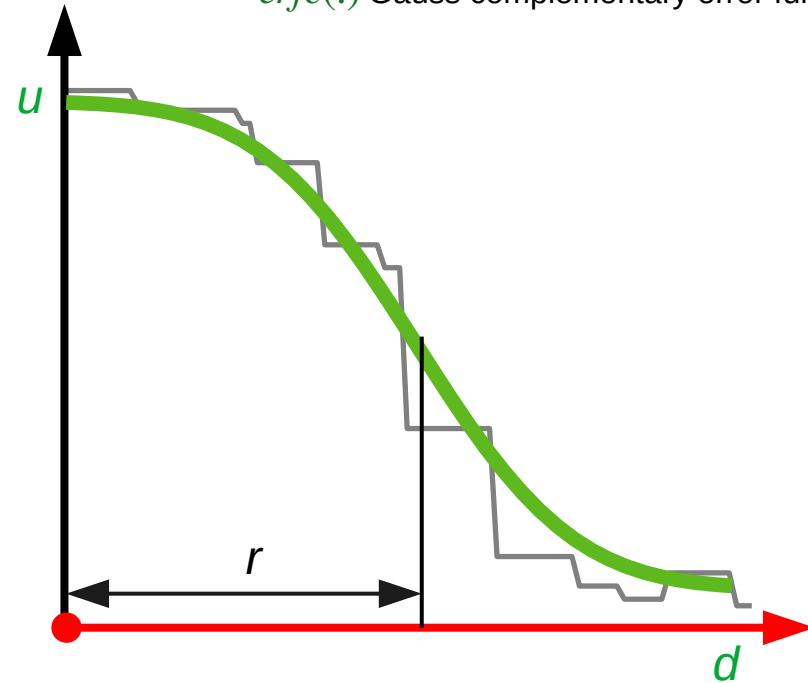
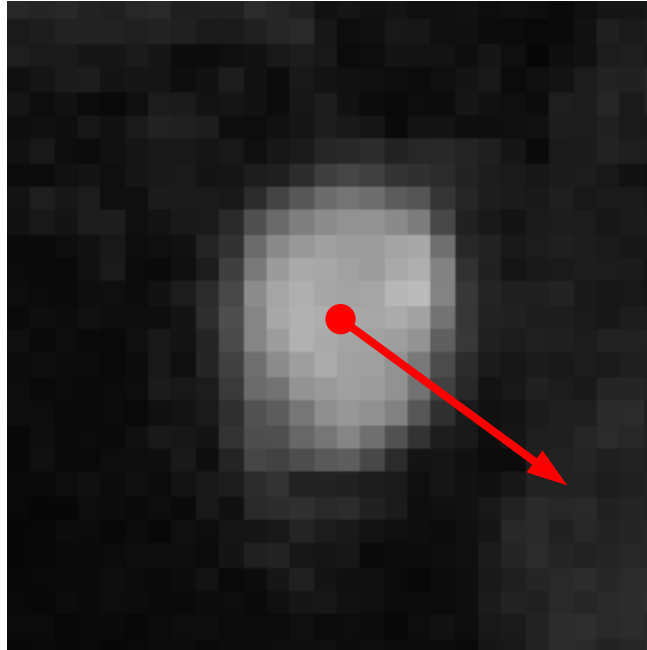
Lokalizacja ścianki



Lokalizacja ścianki

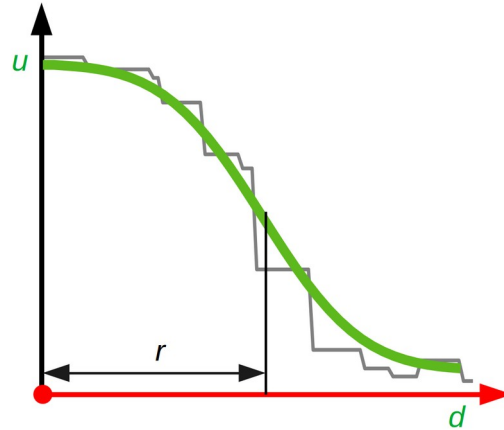
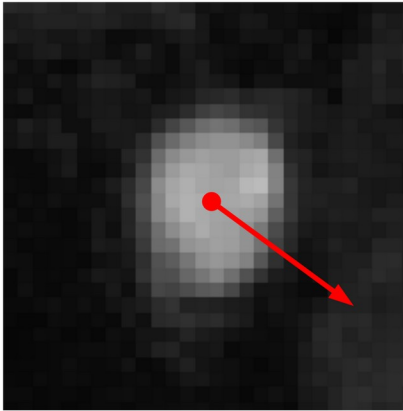
$$u(d; \Delta_V, \Delta_R, V_0, r) = V_0 + \Delta_V \operatorname{erfc} \left(\frac{(d-r)}{\Delta_R} \right)$$

$\operatorname{erfc}(\cdot)$ Gauss complementary error function



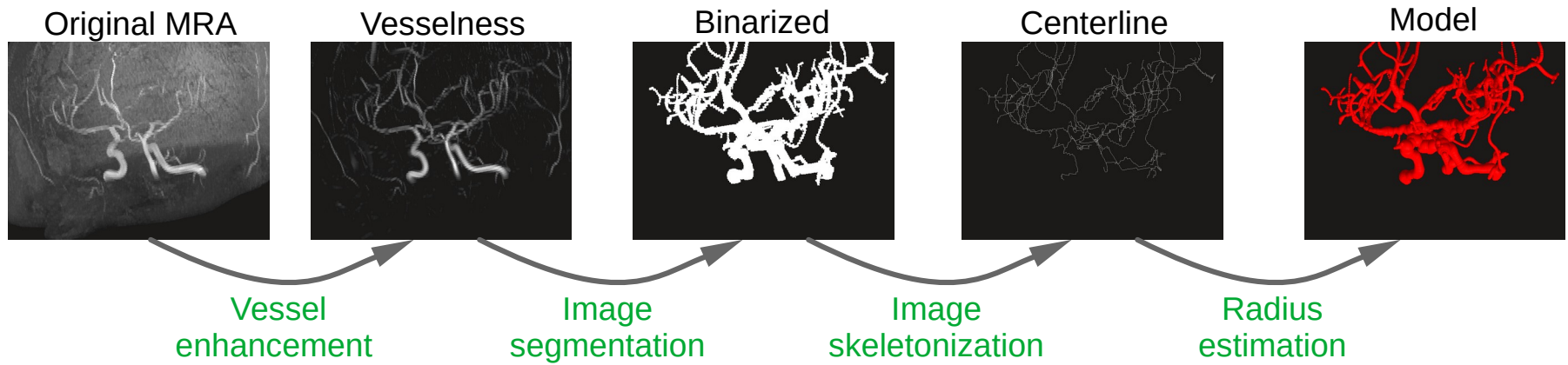
Andrzej Materka, et al. *Automated modeling of tubular blood vessels in 3D MR angiography images*. 9th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA). IEEE, 2015.

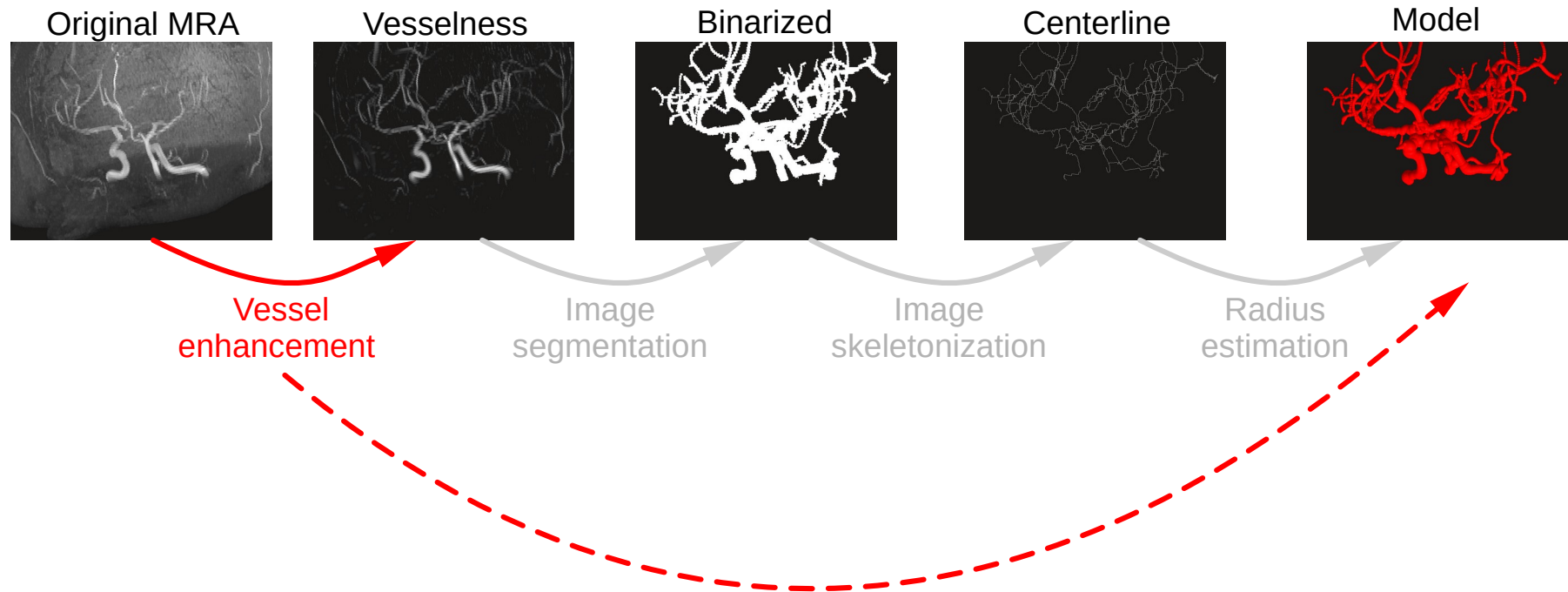
Lokalizacja ścianki



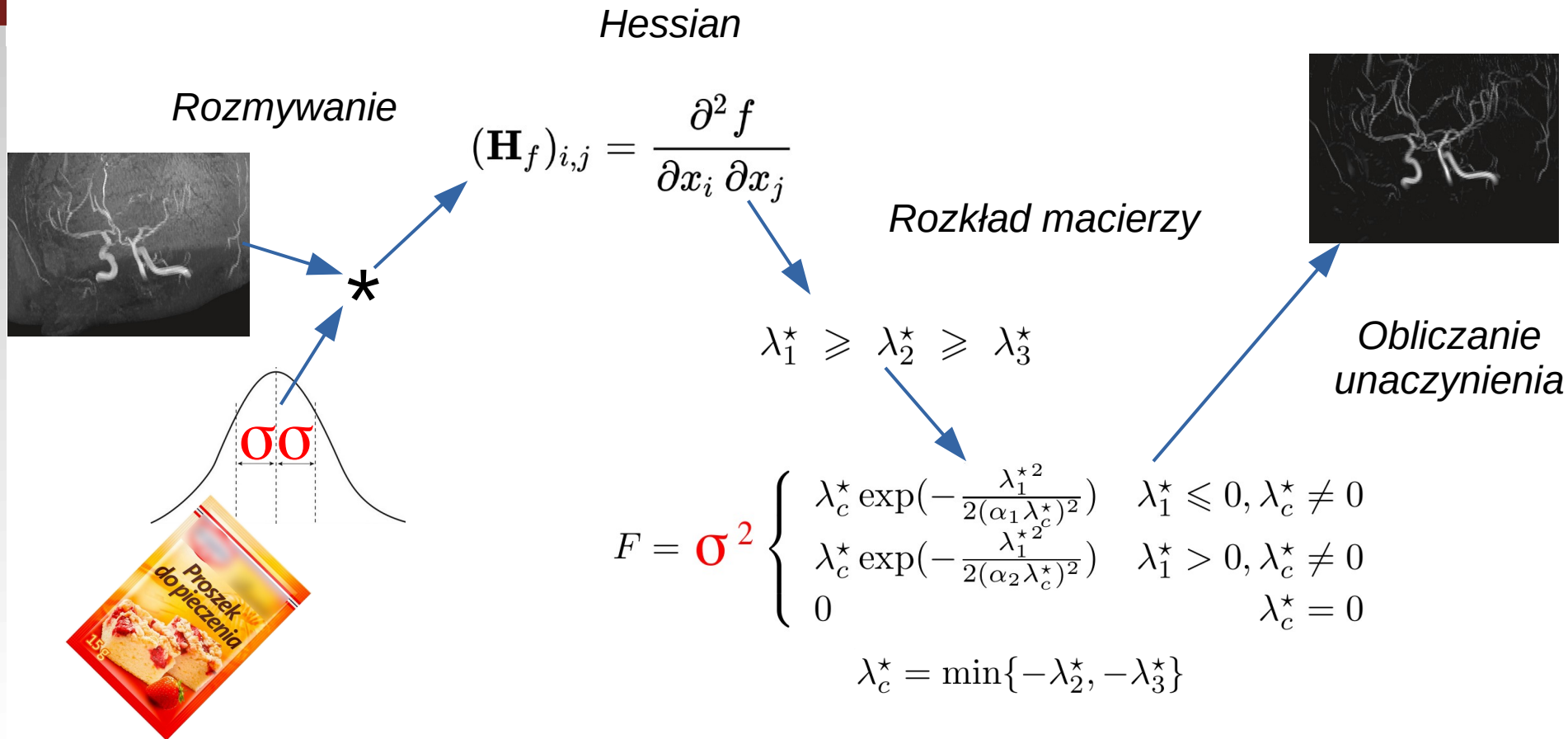
Wymagania:

1. Generowanie obrazu przekroju poprzecznego,
2. Generowanie profilu jasności wzdłuż promienia,
3. Dopasowanie funkcji *erfc* do profilu jasności.



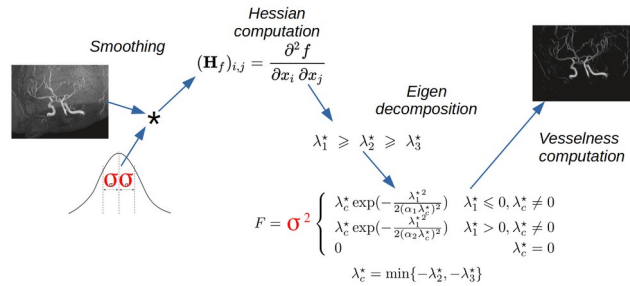


Funkcja unaczynienia (Vesselness function)

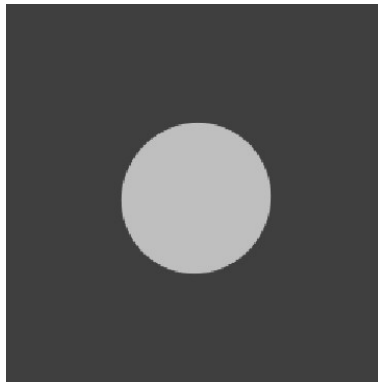


Sato, Yoshinobu, et al. *3D multi-scale line filter for segmentation and visualization of curvilinear structures in medical images*. CVRMed-MRCAS'97. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.

Wieloskalowa funkcja unaczynienia

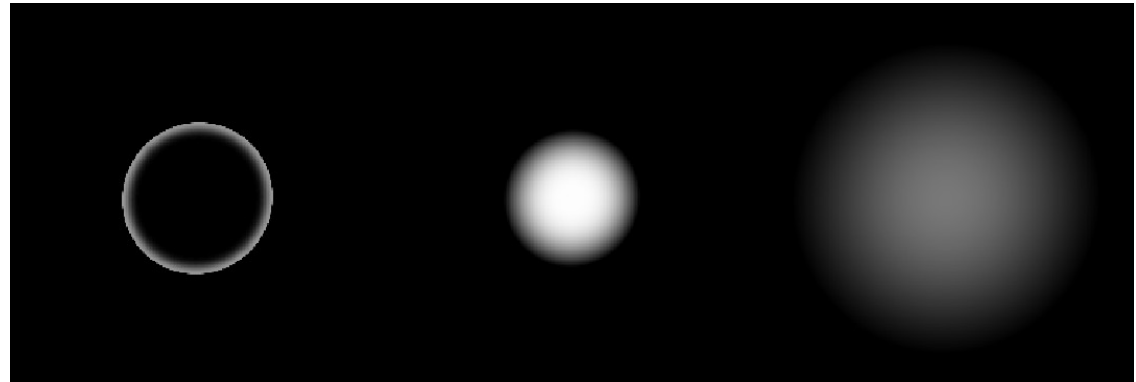


Cross
section



$r = 5$

$F(\sigma)$

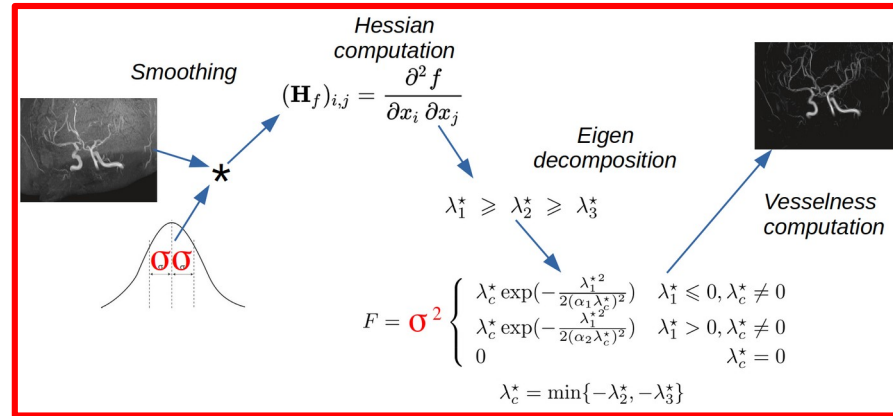


$\sigma = 2$

$\sigma = 5$

$\sigma = 10$

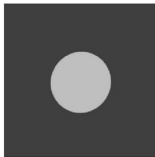
Wieloskalowa funkcja unaczynienia



$$\sigma = 1, 2, 4, 8 \dots$$

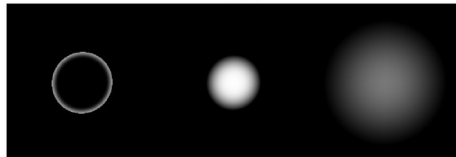
Zależność od odchylenia standardowego

Cross
section



$r = 5$

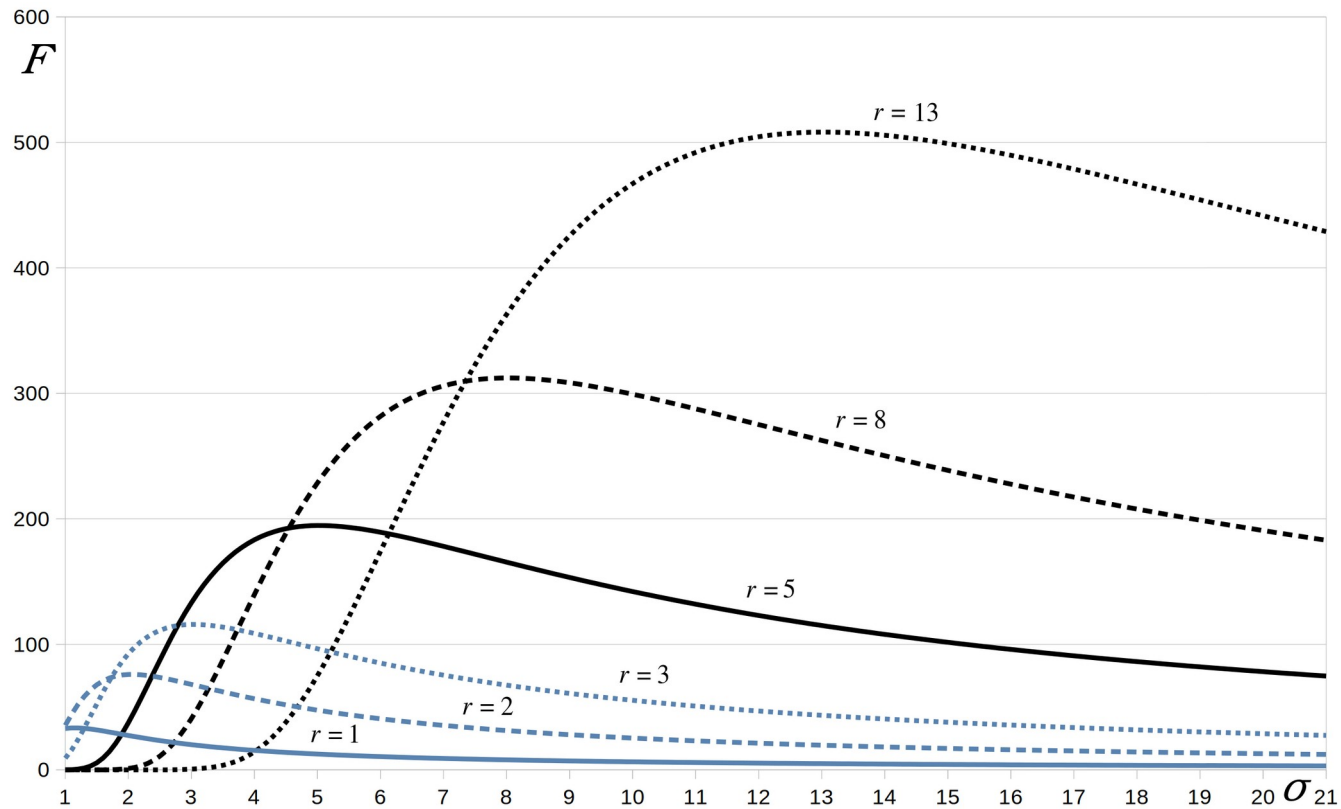
$F(\sigma)$



$\sigma = 2$

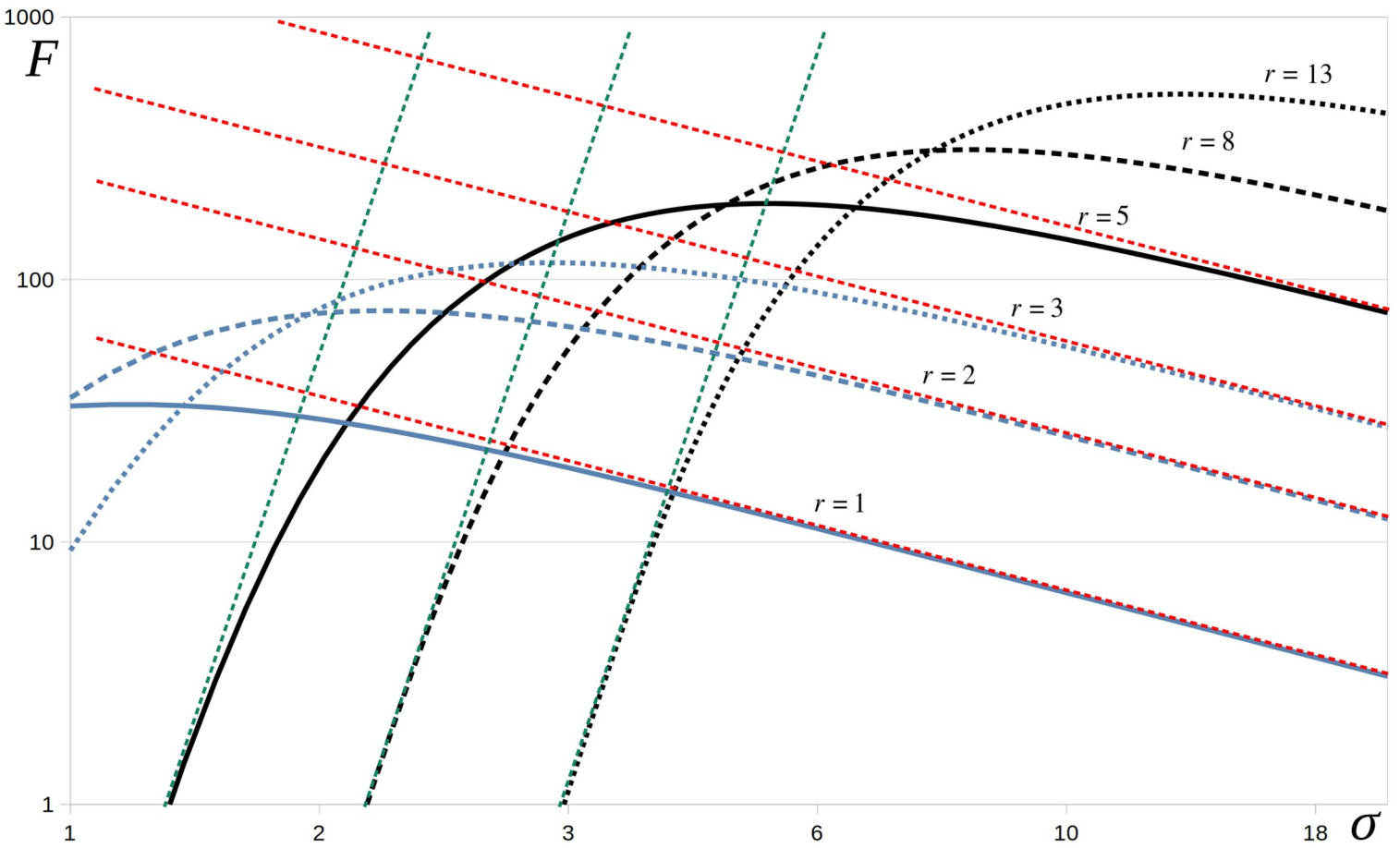
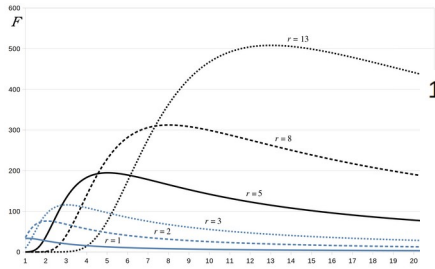
$\sigma = 5$

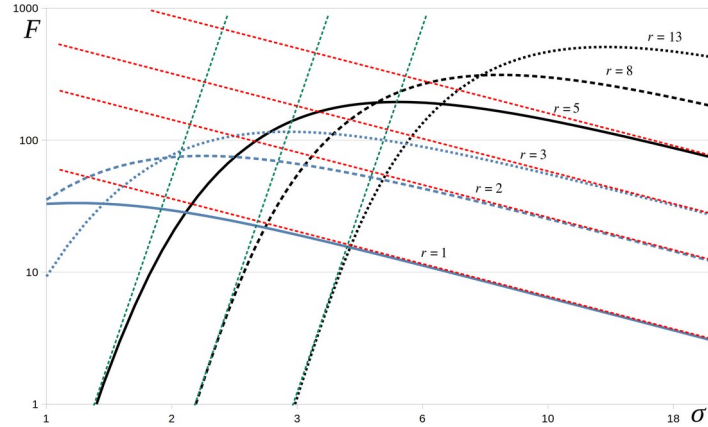
$\sigma = 10$





Zależność od odchylenia standardowego





$$f(\sigma; A, r) = \frac{A\omega r\kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2 \left(\frac{\sigma}{\omega r} - \frac{\omega r}{\sigma}\right)^2}} \left(\frac{\left(\frac{\sigma}{\omega r}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega r}\right)^2} \right)^\eta$$

$$\kappa = 17.289, \omega = 0.03411 \text{ and } \eta = 432$$

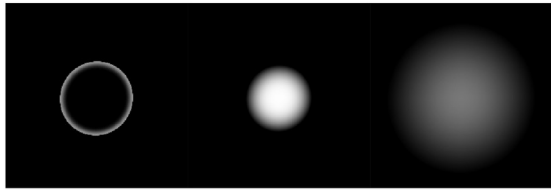
Algorytm

1. Wybierz punkt na linii środkowej naczynia,
2. Oblicz funkcję unaczynienia dla wybranych skal σ ,
3. Dopasuj $f(\sigma; A, r)$ do uzyskanych wartości,
4. Parametr r jest estymatą promienia.

Powyższe kroki powtórz dla punktów wzdłuż linii
środkowych naczyń krwionośnych.

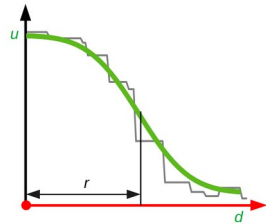
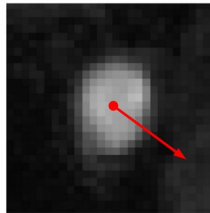


Walidacja nowej metody

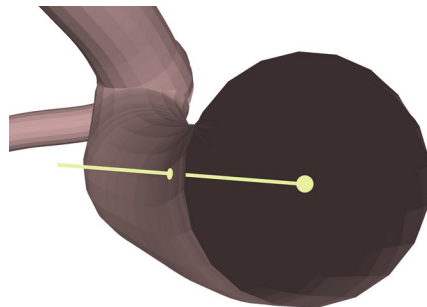


$$f(\sigma; A, r) = \frac{A\omega r\kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2 \left(\frac{\sigma}{\omega r} - \frac{\omega r}{\sigma}\right)^2}} \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega r}\right)^2\right)^\eta$$

Radius estimation from
multiscale vesselness
(REMV)



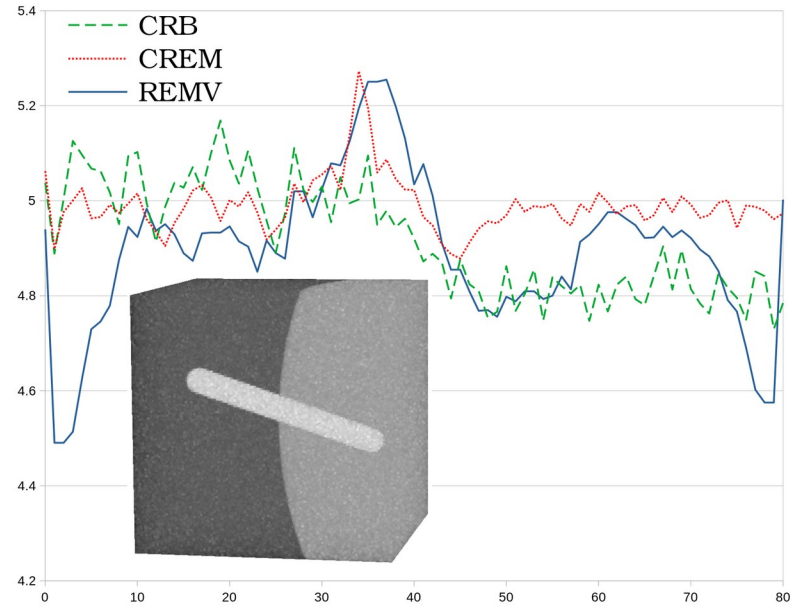
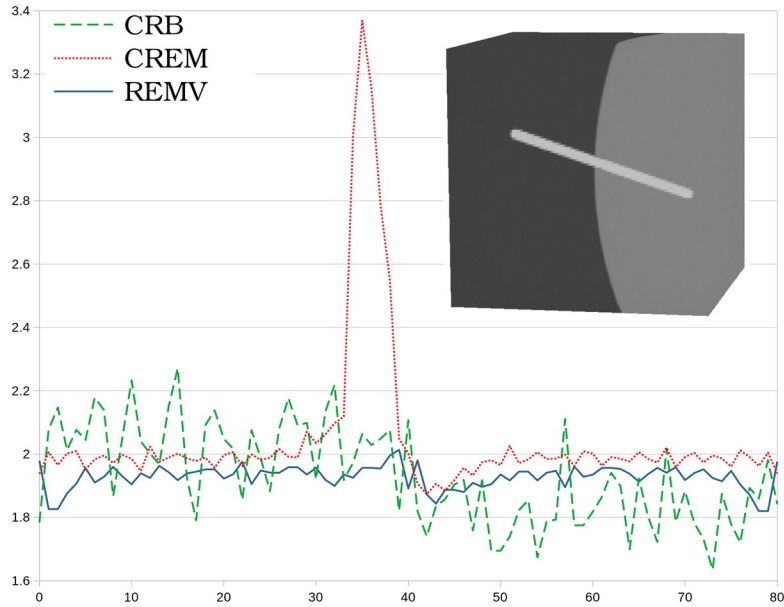
Cross-sectional ray-casting
with erfc matching
(CREM)



Cross-sectional ray-casting
in binary image
(CRB)



Obrazy sztuczne





Radius	Noise	CREM	CRB	REMV
1	1	1.52	0.92	1.02
1	5	1.51	0.93	1.03
1	13	1.44	0.94	1.06
5	1	5.01	4.91	4.85
5	5	5.01	4.91	4.86
5	13	5.01	4.90	4.86
13	1	12.94	12.91	12.63
13	5	12.44	12.91	12.64
13	13	8.21	12.90	12.64
	Time:	02:06:41	00:00:39	00:18:36

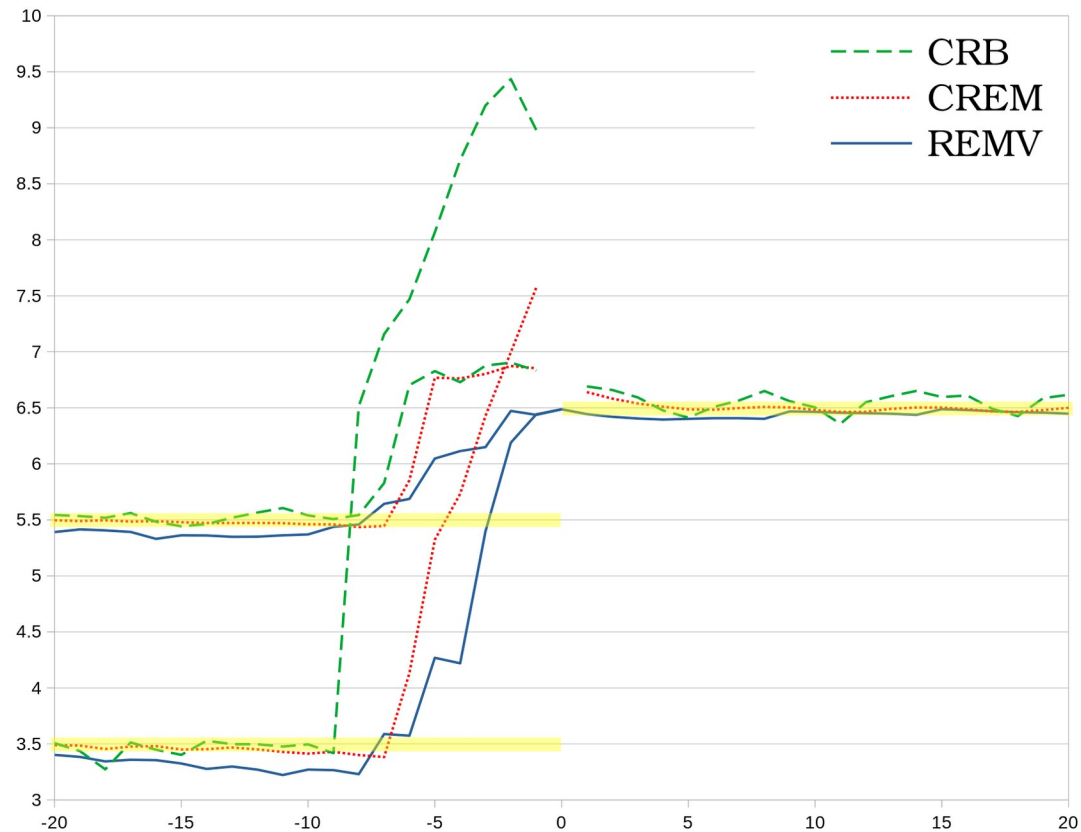
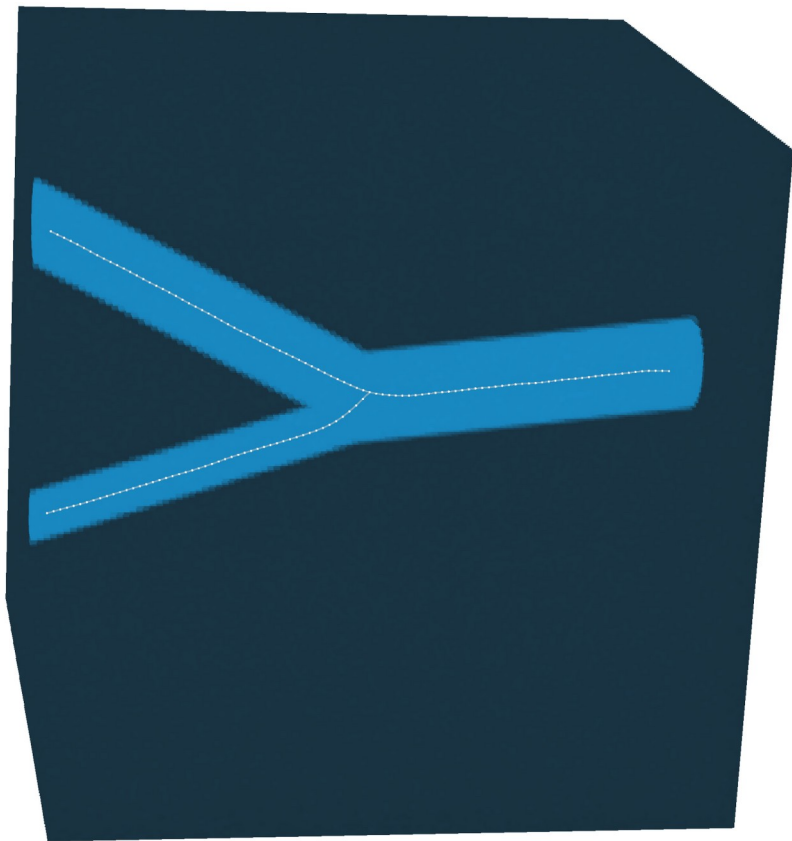


Radius	Noise	CREM	CRB	REMV
1	1	1.52	0.92	1.02
1	5	1.51	0.93	1.03
1	13	1.44	0.94	1.06
5	1	5.01	4.91	4.85
5	5	5.01	4.91	4.86
5	13	5.01	4.90	4.86
13	1	12.94	12.91	12.63
13	5	12.44	12.91	12.64
13	13	8.21	12.90	12.64

Time: 02:06:41 00:00:39 00:18:36

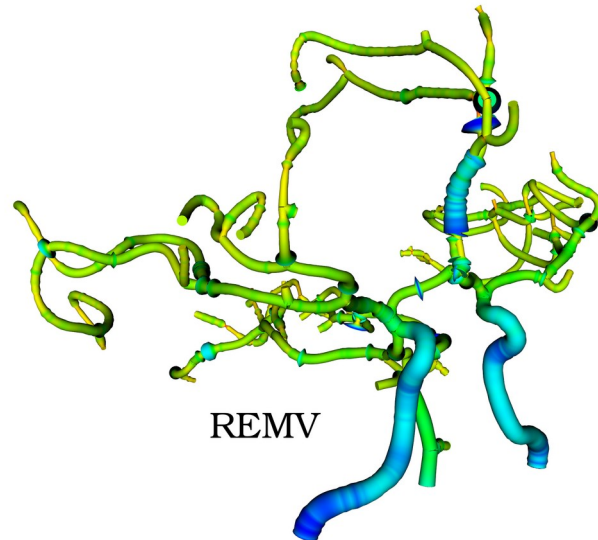
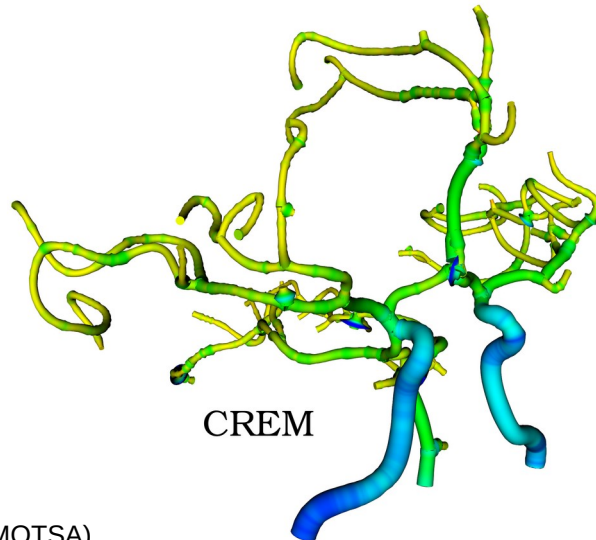
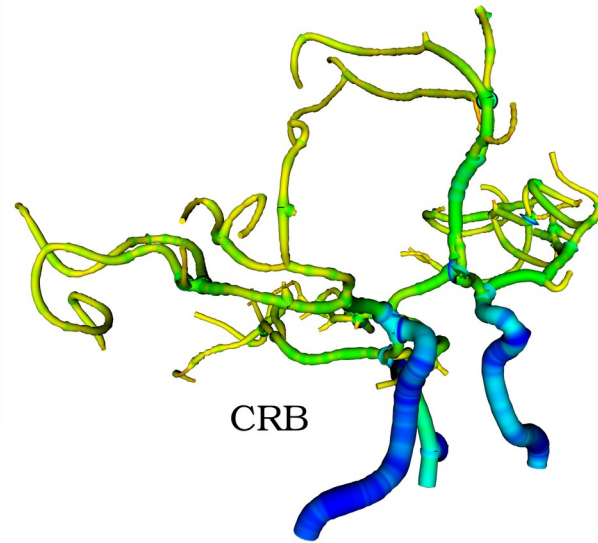
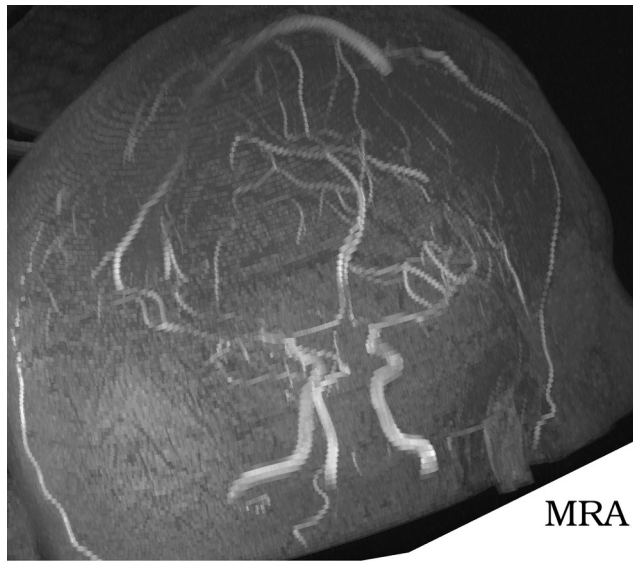


Obraz rozgałęzienia





MRA



A 3D MRA of a head (TOF – MOTSA)
courtesy of Prof. Jürgen R. Reichenbach from University Hospital Jena, Germany



1. Metoda estymacji promienia jest efektywna i dokładna.
2. Wykłady z algebry okazały się przydatne i nie należy z nich rezygnować