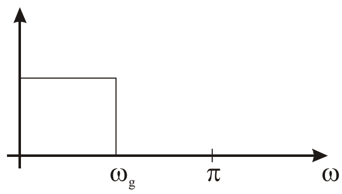
Projektowanie filtrów SOI metodą okien czasowych

Najbardziej bezpośrednim podejściem do projektowania filtrów SOI (filtrów o **S**kończonej **O**dpowiedzi **I**mpulsowej) (FIR – **F**inite **I**mpulse **R**esponse) jest obcinanie ciągu stanowiącego nieskończoną odpowiedź impulsową. Załóżmy, że $H_d(e^{j\varpi})$ opisuje pożądaną charakterystykę częstotliwościową. Wtedy $h_d(n)$ jest ciągiem próbek pożądanej odpowiedzi impulsowej:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\varpi})e^{j\varpi n}d\varpi$$

Można wykazać, że współczynniki te są niczym innym jak współczynnikami licznika transmitancji naszego filtru (w dziedzinie Z). Ponieważ ciąg $h_d(n)$ jest nieskończony, wskazane jest odpowiednie ucięcie tego ciągu do wymaganej długości N przy użyciu odpowiedniego rodzaju okna.
W przypadku filtru dolnoprzepustowego (DP) o charakterystyce jak na rysunku odpowiedź impulsowa wyraża się wzorem:



$$h(n) = \frac{\varpi_g}{\pi} Sinc\left(\frac{\varpi_g}{\pi} n\right)$$

W tabeli zebrano zależności opisujące odpowiedzi impulsowe filtrów o typowych charakterystykach.

Rodzaj filtru	Odpowiedź impulsowa
dolnoprzepustowy (DP)	$h(n) = \frac{\varpi_g}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\varpi_g}{\pi} n\right)$
górnoprzepustowy (GP)	$h(n) = 1 - \frac{\varpi_d}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\varpi_d}{\pi} n\right)$
pasmowo-przepustowy (PP)	$h(n) = \frac{\varpi_2}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\varpi_2}{\pi} n\right) - \frac{\varpi_1}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\varpi_1}{\pi} n\right)$
pasmowo-zaporowy (PZ)	$h(n) = 1 + \frac{\varpi_1}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\varpi_1}{\pi} n\right) - \frac{\varpi_2}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\varpi_2}{\pi} n\right)$

Projektowanie filtrów SOI metodą próbkowania w dziedzinie częstotliwości

Wykazać można, że ciąg o skończonym czasie trwania (o długości N) wyrazić można za pomocą N próbek dyskretnej transformaty Fouriera:

$$\widetilde{H}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Transmitancja $H(z)$ takiego filtru może być wyrażona za pomocą $\widetilde{H}(k)$:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\widetilde{H}(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}},$$

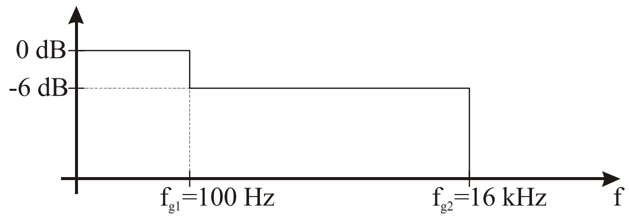
co po podstawieniu $z = e^{j\varpi}$ daje:

$$H(e^{j\varpi}) = \frac{1 - e^{-j\varpi N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\widetilde{H}(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\varpi}}$$

Mając zatem próbki wymaganej charakterystyki częstotliwościowej możemy przyjmując rząd filtru N znaleźć aproksymującą ją (z lepszym lub gorszym efektem) transmitancję $H(e^{j\varpi})$.
Współczynniki filtru znajdujemy dokonując odwrotnej DFT naszego ciągu próbek $\widetilde{H}(k)$.
Metoda ta jest o tyle wygodna i użyteczna, że z użyciem komputera pozwala znaleźć współczynniki filtrów o dowolnie zadanym kształcie bez wcześniejszych analitycznych obliczeń odpowiedzi impulsowej filtru.

Zadania

1. Posługując się metodą okien czasowych zaprojektować filtr dolnoprzepustowy rzędu $N = 15$ o częstotliwości granicznej $f_d = 5$ kHz. Założyć częstotliwość próbkowania $f_s = 16000$ Hz. Zbadać charakterystyki częstotliwościowe filtru ze szczególnym uwzględnieniem kształtu charakterystyki fazowej. Do projektu użyć kolejno okien prostokątnego, Hamminga, Bartletta, Blackmana i trójkątnego. Porównać amplitudę listków bocznych, szerokość listka głównego oraz minimalne tłumienie w pasmie zaporowym w zależności od zastosowanego okna. Zwrócić uwagę na charakterystyki fazowe otrzymanych filtrów. Zmieniając rząd filtru i dobierając odpowiednie okno opracować filtr o tłumieniu min. 70 dB w pasmie zaporowym. Przefiltrować opracowanym filtrem przebieg prostokątny o wypełnieniu 50 % i częstotliwości $f = 4$ kHz.
2. Posługując się metodą okien czasowych zaprojektować filtr pasmowo-przepustowy o częstotliwościach odcięcia $f_d = 50$ Hz i $f_g = 16000$ Hz przy założonej częstotliwości próbkowania $f_s = 44.1$ kHz. Dobrać optymalnie rząd filtru i okno. Zamieścić i skomentować jego charakterystyki.
3. Korzystając z metody próbkowania w dziedzinie częstotliwości zaprojektować filtr górnoprzepustowy o częstotliwości granicznej $f_g = 200$ Hz ($f_s = 8$ kHz). Zbadać kształt charakterystyk filtru po modyfikacji położenia jednej próbki i dwóch próbek w pasmie przejściowym filtru.
4. Zaprojektować filtr o podanym kształcie charakterystyki ($f_s = 48$ kHz):



Matlab – użyteczne funkcje:
sinc, freqz, impz, filter, sign, blackman, bartlett, boxcar, hamming, triang