SiST (na stronie wykład 5)

Techniki modelowania

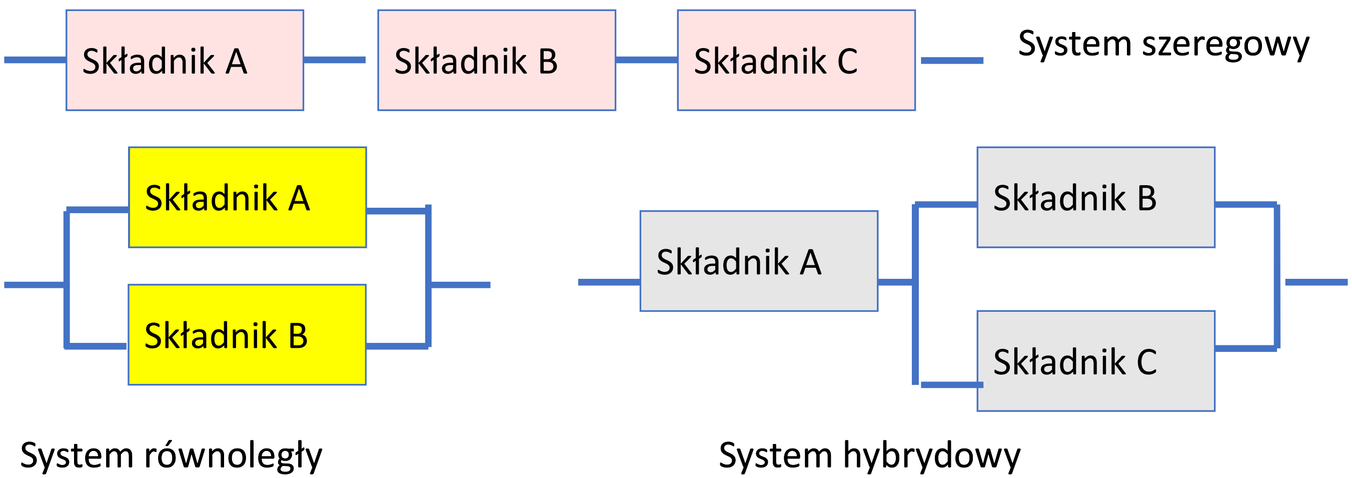
dr inż. Małgorzata Langer

PRZEGLĄD TECHNIK MODELOWANIA

- Blokowe Schematy Niezawodnościowe (*Reliability Block Diagrams – **RBD***)
- Modele Markowa
- Drzewa błędów
- Metoda minimalnego zestawu
- Sieć Petriego
- Symulacje Metodami Monte Carlo (MC)

Blokowe Schematy Niezawodnościowe

Graficzne przedstawienie prostych strategii tworzenia rezerw; modele najprostsze; zakładają dwa stany elementu (sprawny – niesprawny)



RBD (Reliability Block Diagram)

- Podstawą jest, że system uważamy za sprawny, jeżeli istnieje przynajmniej jedna ścieżka przejścia (od wejścia do wyjścia)
- W systemie szeregowym awaria dowolnego elementu przerywa ścieżkę, powodując niedostępność systemu
- W systemie równoległym muszą ulec awarii elementy w każdej z gałęzi równoległych, aby przerwać ścieżkę
- W systemie hybrydowym istnieją gałęzie z szeregowo połączonymi elementami i gałęzie równoległe

Systemy szeregowe RBD

Jeżeli oznaczymy przez R_i niezawodność każdego składnika w systemie szeregowym, to NIEZAWODNOŚĆ SYSTEMU wyniesie:

$$R = \prod_i R_i$$

Ponieważ niezawodność systemu szeregowego jest iloczynem niezawodności jego składników – BĘDZIE ZAWSZE GORSZA NIŻ NIEZAWODNOŚĆ NAJGORSZEGO SKŁADNIKA

Systemy szeregowe są słabsze od swojego najsłabszego ogniwa

Systemy równoległe RBD

Jeżeli rozważamy system złożony wyłącznie z elementów połączonych równolegle, każdy o niezawodności R_i, wtedy niezawodność systemu wyniesie:

$$R = 1 - \prod_{i} (1 - R_i)$$

W systemie równoległym niezawodność systemu jest większa niż niezawodności dowolnej pojedynczej gałęzi

OBA POWYŻSZE RÓWNANIA MAJĄ ZASTOSOWANIE RÓWNIEŻ DLA **DOSTĘPNOŚCI**

Systemy RBD typu N z M

- W równoległym systemie N z M zakładamy, że spośród M elementów, N musi być sprawne, aby system był sprawny, np. dwa spośród czterech zasilaczy muszą być sprawne.
- Schemat wygląda jak zwykły schemat równoległego systemu, ale ze wskazaniem minimalnej ilości N sprawnych elementów
- Jeżeli niezawodność równoległego systemu wynosi R, to niezawodność systemu N z M w tej samej konfiguracji wynosi:

$$R_s = \sum_{i=0}^{m-n} \left(\frac{m!}{i!(m-i)!} \right) (R)^{m-i} (1-R)^i$$

Czas przestoju i dostępność

- W systemie szeregowym czas przestoju jest sumą czasów przestoju wszystkich elementów
- W systemie równoległym rozważamy jeden wspólny czas przestoju, traktując go jako jednostkę
- W systemie hybrydowym sprowadzamy go do systemu szeregowego (rozpatrując fragmenty z równoległymi gałęziami jako zastępczy jeden element połączenia szeregowego)

- Mając wartość czasu przestoju, np. 30 minut rocznie, możemy przekształcić ją na wartość dostępności:

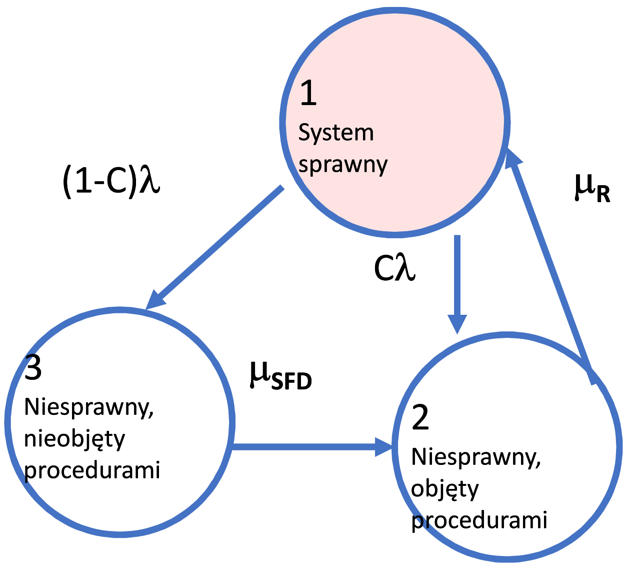
$$\boxed{(525.960 – 30)/525.960 \times 100\% = 99{,}9943\%}$$

Modele Markowa

- Modele Markowa, oparte o „łańcuchy Markowa”, odwzorowują losowe zachowanie systemów, które różni się w sposób dyskretny lub ciągły w funkcji czasu i przestrzeni
- Modelujemy systemy bez pamięci – przyszłe losowe zachowanie się systemu jest niezależne od stanów dawnych, z wyjątkiem stanu ostatniego (poprzedzającego)
- Proces musi być stacjonarny
- Modele Markowa pozwalają na analizę „od szczegółu do ogółu”, co pozwala na analizę kompleksowych systemów i strategii napraw

- Poszczególne stany systemu: sprawność, awarie, naprawy przedstawiane są w poszczególnych chwilach. Można uwzględniać np. częściowe awarie, utratę możliwości, itd

Model Markowa



- **Stan 1** – system jest sprawny ze współczynnikiem λ może ulec awarii i przejść do **stanu 2** – niesprawności, ale procedury obejmują tę awarię (ze współczynnikiem C), została wykryta i już trwa odzyskiwanie sprawności
- Ze współczynnikiem μ_R system wraca do stanu 1, po skończonej naprawie
- Jeżeli awaria nie jest objęta procedurami, system przechodzi do **stanu 3**, a nie 2, więc ze współczynnikiem $(1\text{-}C)\lambda$ i dopiero po wykryciu awarii i jej określeniu, przejdzie ze współczynnikiem μ_{SFD} do stanu 2

Równania stanów

- Jeżeli P_i jest prawdopodobieństwem przebywania w stanie i, równania dla każdego ze stanów są następujące:

- STAN 1 – aktywny – normalna praca
  $\mu_R P_2 - C\lambda P_1 - (1 - C)\lambda P_1 = 0$
- STAN 2 – niesprawny – awaria wykryta i objęta procedurami
  $\mu_{SFD} P_3 + C\lambda P_1 - \mu_R P_2 = 0$
- STAN 3 – niesprawny – awaria nie została wykryta
  $(1-C)\lambda P_1 - \mu_{SFD} P_3 = 0$

- Każde z tych równań wynika z dwóch pozostałych, mamy więc układ dwóch równań niezależnych z trzema niewiadomymi (P_1, P_2, P_3), ale prawdziwe jest również:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

Tabela przejść

	Ze stanu		
Do stanu	**1**	**2**	**3**
2	$C\lambda$	$-\mu_R$	μ_{SFD}
3	$(1-C)\lambda$	**0**	$-\mu_{SFD}$

Przykład obliczeń

- Uwaga: współczynnik awarii podawany jest często w jednostce FIT – *failure in 10^9 hours* (ilość awarii na 10^9 godzin)
- <u>Przykład</u>: Obliczyć wektor prawdopodobieństwa dla 3 stanów z podanego schematu, gdy współczynnik awarii wynosi 10.000 FIT, 90% awarii jest wykrywalnych i objętych procedurami, przeciętna naprawa trwa 4 godziny a wykrycie nieobjętych procedurami awarii trwa przeciętnie 1 godzinę

λ = 1,00E-05	awarii/godz
C = 90,00%	%
μ_R = 0,25	na godzinę
μ_{SFD} = 1	na godzinę

Przykład – c.d.

- Wykorzystujemy dwa równania stanów (np. dla 2 i 3) i sumę prawdopodobieństw.
- Zapisując tabelę przejść jako macierz A, wektor prawdopodobieństw jako P i prawą stronę równań jako R, otrzymujemy:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} C\lambda & -\mu_R & \mu_{SFD} \\ (1-C)\lambda & 0 & -\mu_{SFD} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

AP = R oraz **P = A^{-1}R**

Dyskusja wyniku

- W wyniku obliczeń otrzymujemy:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}999959 \\ 3{,}99984\, x\, 10^{-5} \\ 9{,}99959\, x\, 10^{-7} \end{bmatrix}$$

- Co oznacza, że prawdopodobieństwo stanu 1 – czyli stanu sprawności, wynosi 99,9956%, stanu 2 – awarii, które są wykryte i rozpoznane i mogą być naprawiane – 0,00399984% stanu 3 – awarii, które nie są wykrywane i naprawiane automatycznie – „tylko” 0,0000999959%
- Przeliczając wynik na minuty w ciągu roku (365,25 dni X 24 X 60), okazuje się, że badany system w stanie 2 będzie przebywał 21,04 minuty a w 3 stanie 0,53 minuty – czyli będzie nieprawny **21,57 minut** w roku

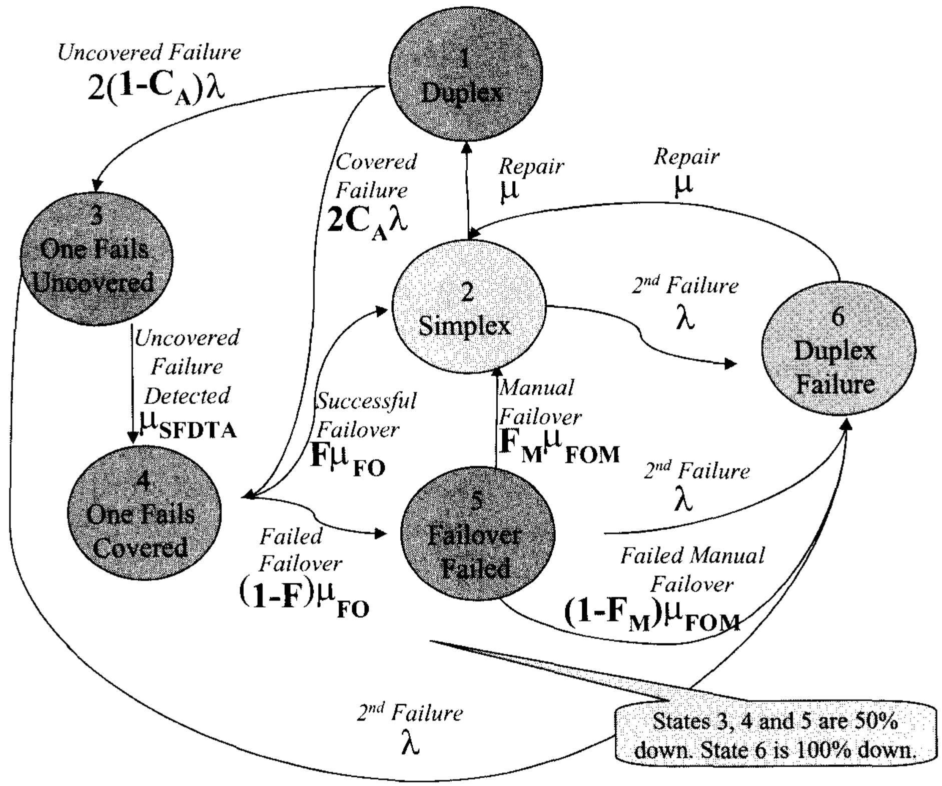
Ograniczenia modeli metodą łańcuchów Markowa

- Musi być prawdziwe założenie, że system jest stacjonarny, homogeniczny i nie posiadać pamięci
- Metodę można stosować tylko do systemów, których zachowanie możemy opisać poprzez rozkład prawdopodobieństw, charakteryzowanych stałymi współczynnikami awarii i odzyskiwania sprawności
- Jeżeli prawdopodobieństwo staje się funkcją czasu lub ilości dyskretnych kroków – proces jest niestacjonarny i metoda łańcuchu Markowa nie może być zastosowana

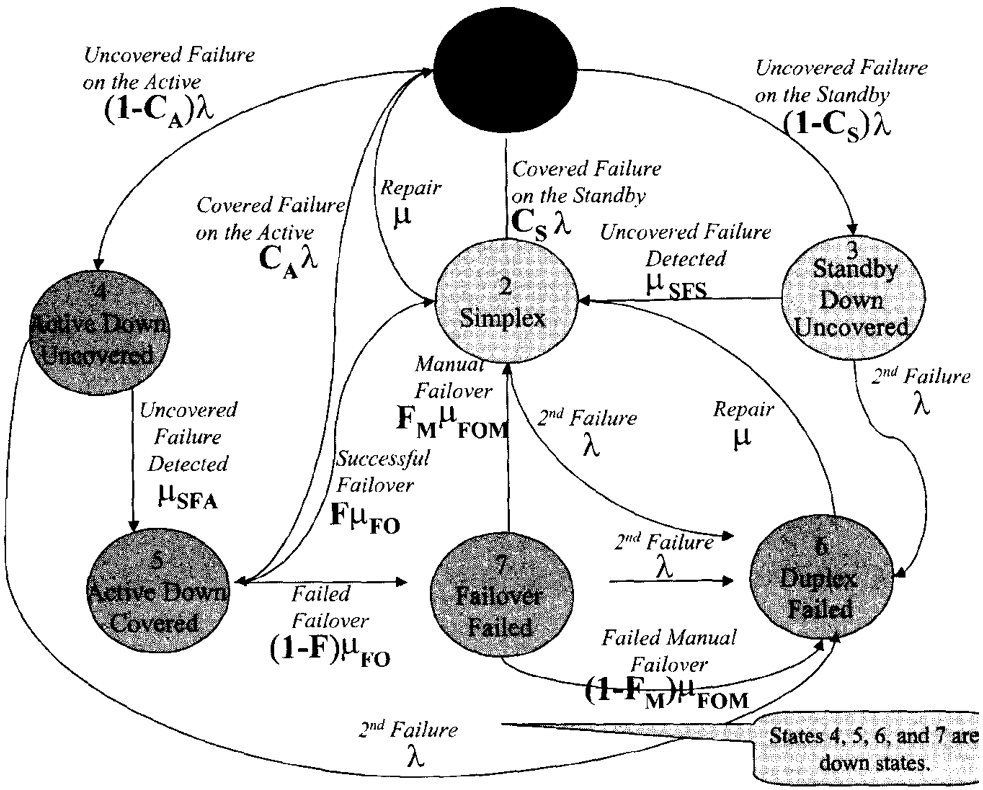
Model Markowa „aktywny – aktywny”

- Omawiany poprzednio model (slajd nr 10) jest prawdziwy dla modelu bez redundancji. Można do takiej postaci zwinąć każdy, nawet skomplikowany system bez redundancji, jeżeli 100% awarii jest objętych procedurami
- Jeżeli istnieje drugie identyczne urządzenie włączone równolegle i **pracujące**, awaria jednej jednostki spowoduje utratę 50% możliwości aż do momentu przywrócenia sprawności
- Układ może przebywać w jednym z 6 stanów:
  1 – System sprawny; oba urządzenia sprawne
  2 – Tylko jedno urządzenie sprawne
  3 – Niewykryta awaria jednego urządzenia (nieobjęta procedurami)
  4 – Jedno urządzenie niesprawne, awaria objęta procedurami
  5 – Przełączenie zawiodło
  6 – Awaria obu urządzeń (**100% niesprawności**)
  Stany 3, 4 i 5 – **50% niesprawności**

„Aktywny – aktywny" – obie gałęzie są obciążone

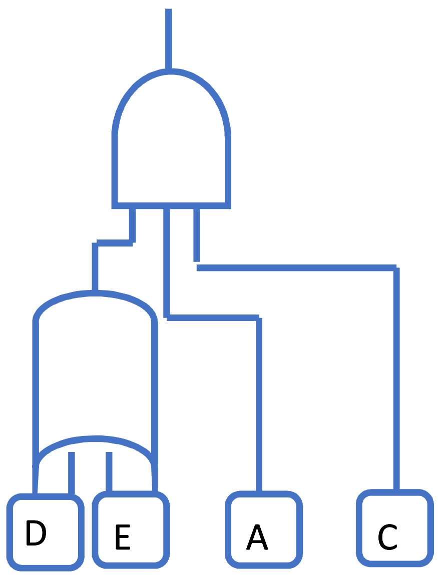


Aktywny – w rezerwie (jedno urządzenie jest zapasowe)



Drzewa błędów

- Rysujemy schemat drzewa błędów, gdzie inaczej niż w RBD (wstawialiśmy elementy), wstawiamy „wydarzenia”. Wydarzenia są łączone przy użyciu bramek logicznych (na rysunku ograniczyłam się do AND i OR)



Awaria systemu

Awaria systemu jest „jedynką”, jeżeli „jedynką” jest albo A, albo C, albo D i E (lub zachodzi więcej niż jedno z tych wydarzeń)

Awarie szeregowo połączonych A i C oraz grupy równoległej D i E

Drzewo Błędów

- Ścieżka od wydarzenia do warunku wystąpienia awarii (czyli na naszym rysunku od dołu do góry) nazywa się „wyciętym zestawem” *[cut set]* , przy czym najkrótsza ścieżka jest „minimalnym wyciętym zestawem” *[minimal cut set]*

- Drzewo błędów modeluje „przestrzeń awarii”, RBD – „przestrzeń sukcesu”. Nie zawsze możliwa jest prosta konwersja schematów.

- W drzewie błędów nie bierze się pod uwagę koncepcji napraw i konserwacji, które można uwzględnić w modelach Markowa. Nadają się do systemów, gdzie element posiada swój wtórnik i naprawa lub konserwacja nie powoduje niesprawności składnika.

Minimalny wycięty zestaw

- **Wycięty zestaw** jest to zestaw składników systemu, których awaria powoduje awarię systemu (czyli taki zestaw, który „wycięty” z systemu, spowoduje jego awarię).
- **Minimalny wycięty zestaw** jest to zestaw składników systemu, których awaria powoduje awarię systemu ale **jeżeli przynajmniej jeden z jego składników nie ulegnie awarii – NIE ULEGNIE AWARII SYSTEM**
- W sensie logicznym składniki minimalnego zestawu są ustawione równolegle

Metoda obliczeń

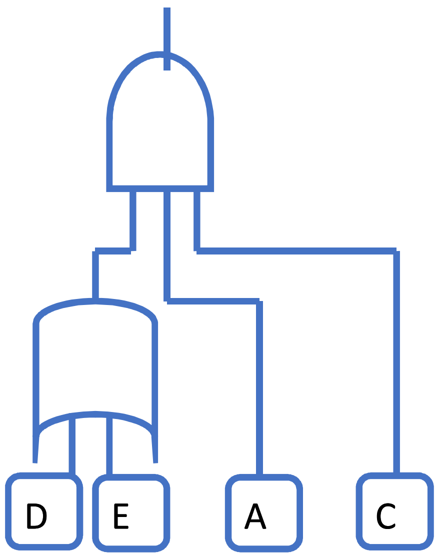
- Niezawodność (lub zawodność) systemu oblicza się poprzez znalezienie wszystkich minimalnych wyciętych zestawów
- Prawdopodobieństwo zawodności będzie sumą prawdopodobieństw zdarzeń opisywanych minimalnymi wyciętymi zestawami
- Czyli, jeżeli przez C_i oznaczymy minimalny wycięty zestaw nr i, to wartość prawdopodobieństwa niesprawności systemu będzie równa:

- $R_S = 1 - F_S$

- Prawdopodobieństwo niezawodności wyniesie

$$F_S = P(C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n)$$

Przykład



- Wycięte zestawy są następujące:
  {A}, {C}, {A,C}, {D,E}, {A,E}, {A, D}, {C, D},
  {C, E}, {C,D.E}, {A, D, E}, {A, C, D, E}
  Każda z tych kombinacji awarii A, C, D i E spowoduje awarię systemu

- **Minimalne wycięte zestawy**: {A}, {C}, {D, E}
  Każdy z tych zestawów zawiera przynajmniej jedno wydarzenie, które, jeżeli zostanie usunięte z zestawu nie pozwoli na awarię całego systemu

$$F_S = P(C_A \cup C_C \cup C_{DE}) = P(C_A) + P(C_C) + P(C_{DE}) -$$
$$- P(C_A \cap C_C) - P(C_A \cap C_{DE}) - P(C_C \cap C_{DE}) +$$
$$+ P(C_A \cap C_C \cap C_{DE})$$

Przykład – c.d.

- Jeżeli niezawodność każdego składnika i oznaczymy jako R_i, to poszczególne składniki wzoru obliczymy jako:

$$P(C_A) = 1 - R_A$$

$$P(C_C) = 1 - R_C$$

$$P(C_{DE}) = (1 - R_D)(1 - R_E)$$

$$P(C_A \cap C_C) = P(C_A)P(C_C) = (1 - R_A)(1 - R_C)$$

$$P(C_A \cap C_{DE}) = P(C_A)P(C_{DE}) = (1 - R_A)(1 - R_D)(1 - R_E)$$

$$P(C_C \cap C_{DE}) = P(C_C)P(C_{DE}) = (1 - R_C)(1 - R_D)(1 - R_E)$$

$$P(C_A \cap C_C \cap C_{DE}) = P(C_A)P(C_C)P(C_{DE}) = (1 - R_A)(1 - R_C)(1 - R_D)(1 - R_E)$$

Przykład – c.d.

- Po podstawieniu, zawodność systemu obliczymy jako:

$$F_S = (1 - R_A) + (1 - R_C) + (1 - R_D)(1 - R_E) - (1 - R_A)(1 - R_C) -$$

$$- (1 - R_A)(1 - R_D)(1 - R_E) - (1 - R_C)(1 - R_D)(1 - R_E) +$$

$$+ (1 - R_A)(1 - R_C)(1 - R_D)(1 - R_E) =$$

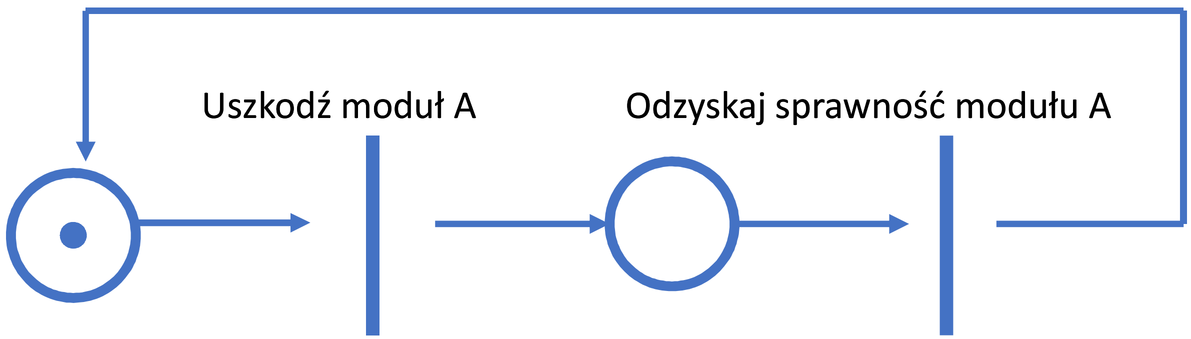
$$= 1 - R_A R_C R_D - R_A R_C R_E + R_A R_C R_D R_E$$

Sieci Petriego (Sieci P/T – *place/transition*)

- Struktura sieci P/T składa się z „miejsc", „przejść" oraz połączeń z nadanym zwrotem (strzałek)
- Graf Petriego pozwala na pokazanie aktualnych funkcji systemu a poprzez zastosowanie oznakowań przypisanie znaczników (żetonów) do sieci.
- Można badać blokady lub awarie, monitorując poziomy pracy i niezawodności.
- Sieć Petriego składa się z czterech podstawowych elementów, które pozwalają na rysunek grafu:

  - miejsca są reprezentowane przez kółka
  - przejścia są reprezentowane przez pionowe grube linie
  - jest jedna lub więcej funkcja wejściowa
  - jest jedna lub więcej funkcja wyjściowa

Przykład sieci Petriego



MIEJSCE:
Moduł A działa normalnie

PRZEJŚCIE:
Czas awarii odwzorowany jest rozkładem wykładniczym z parametrem λ

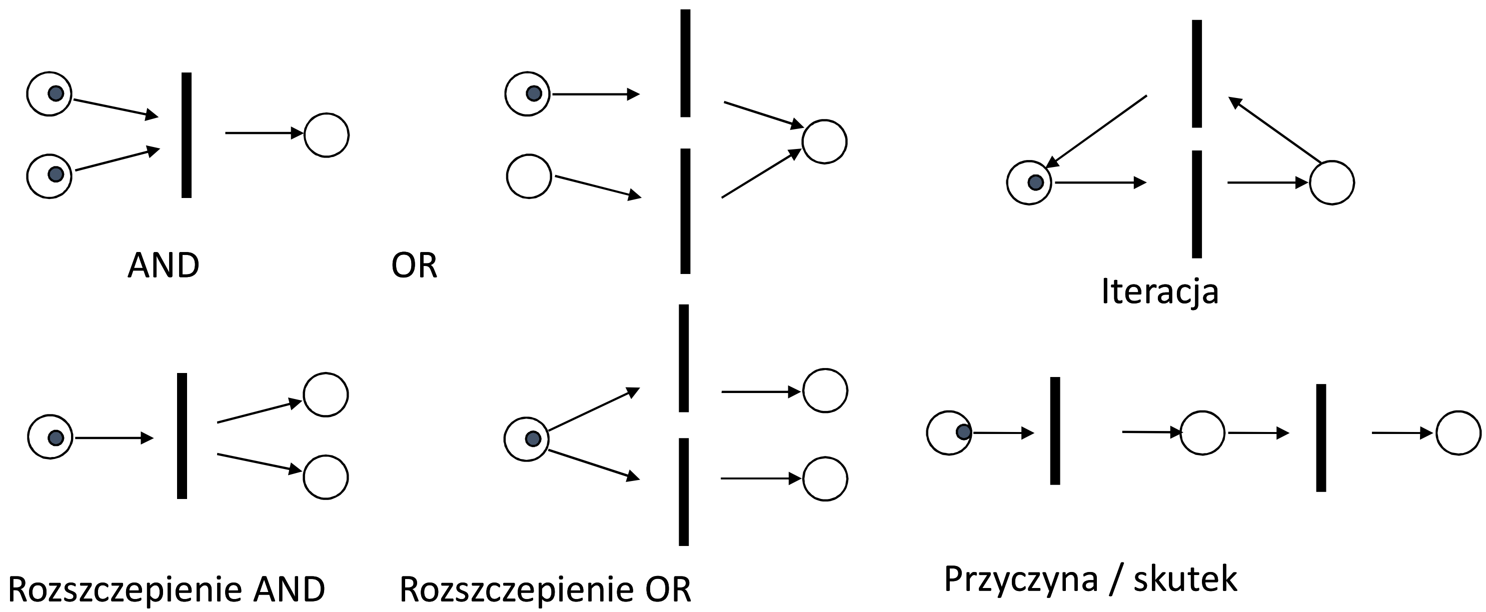
MIEJSCE:
Moduł A jest uszkodzony; gotowy do naprawy

PRZEJŚCIE:
Czas odzyskiwania sprawności odwzorowany jest rozkładem wykładniczym z parametrem λ

c.d.

- Miejsca zawierają żetony, reprezentowane na rysunku przez duże kropki. Można uważać je za zasoby. Oznakowanie sieci Petriego jest zdefiniowane przez liczbę żetonów w każdym miejscu, które traktuje się jako STANY sieci Petriego
- Sieci Petriego są stosunkowo nowym narzędziem w zarządzaniu i obliczaniu niezawodności. Pozwalają na opis systemów współbieżnych, asynchronicznych, rozproszonych, równoległych, niedeterministycznych i/lub losowych.
- Istnieje coraz więcej metod wykorzystujących sieci Petriego przy modelowaniu i analizie niezawodności, np.:
  - **SPN** (stochastic Petri net) uwzględnia czas do rozpoczęcia każdego przejścia
  - **GSPN** (generalised stochastic Petri net) pozwala na zerowe czasy przejścia, lub w rozkładzie wykładniczym
  - **ESPN** (extended stochastic Petri net) pozwala na dowolny rozkład statystyczny czasów przejścia
  - **TPN** (timed Petri net) przypisuje skończoną wartość do każdego czasu przejścia

Podstawowe funkcje logiczne w sieciach Petriego



Metody Monte Carlo wstęp

- Poprzednio opisane metody są metodami analitycznymi – pozwalają na obliczenie wyniku przy pomocy równania, bądź układu równań
- Alternatywą są metody numeryczne; można zaliczyć do nich metody MC
- Powszechne wykorzystanie komputerów o dużych mocach obliczeniowych ułatwia stosowanie metod; możliwe jest np. użycie arkuszy kalkulacyjnych Excel

MC …

- Metoda symulacji wykorzystująca metodę Monte Carlo wykorzystuje losowo generowane liczby do rozwiązania danego problemu, czyli jest to **stochastyczna (niedeterministyczna)** metoda symulacji.
  Sam rozwiązywany problem może być natomiast:

  - probabilistyczny – losowe liczby obrazują bezpośrednio proces fizyczny
  - deterministyczny – znajdujemy funkcję odwrotną do dystrybuanty pożądanego rozkładu.
- Jeżeli generowane są liczby losowe o rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa f(x) to dystrybuantą zmiennej losowej jest funkcja F(x):

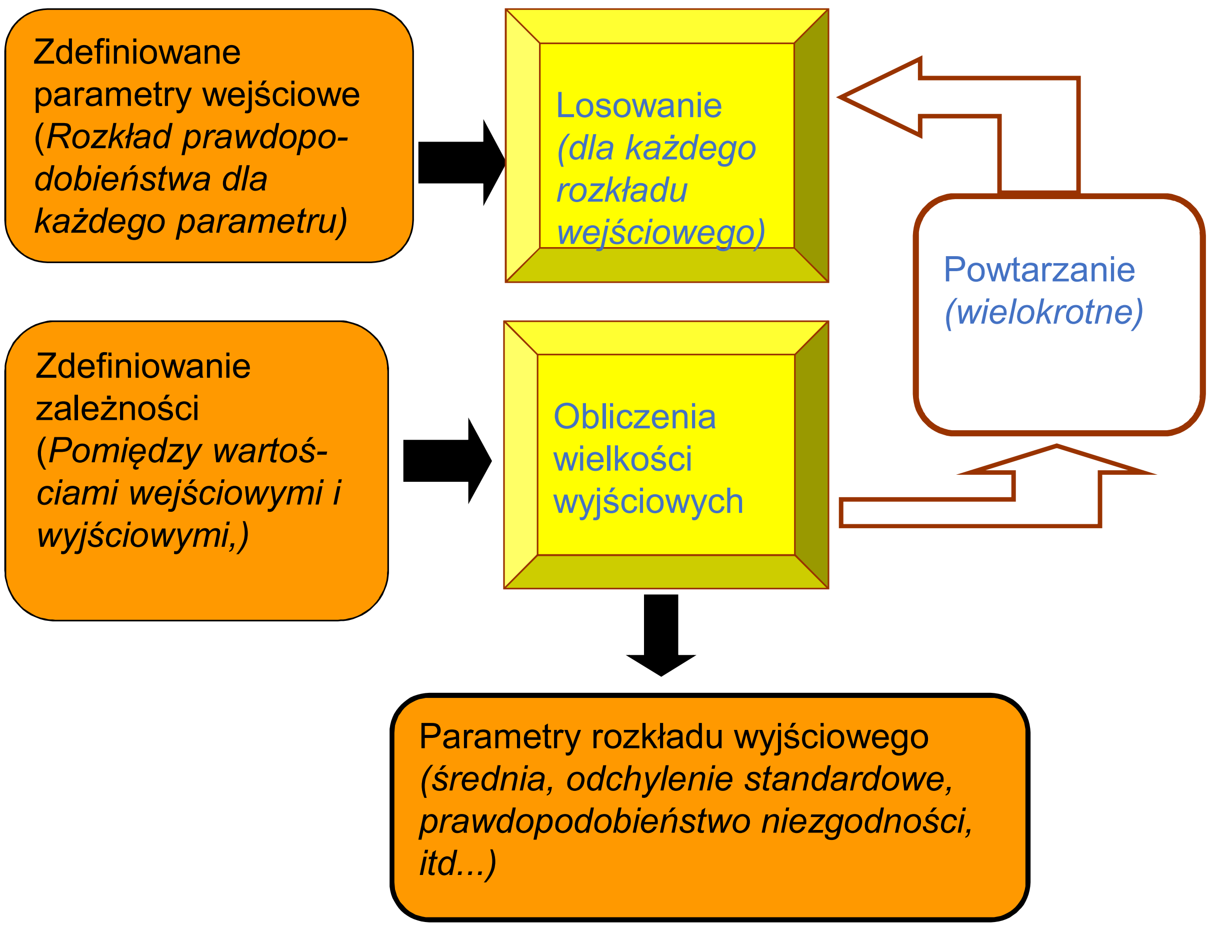
$$F(x) \equiv P(t \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

  której wartości równają się prawdopodobieństwu, że wartość t zmiennej losowej nie przekracza x.

Metoda Monte Carlo

- Jest to metoda, polegająca na generowaniu (symulacji) zmiennych losowych w celu oszacowania parametrów ich rozkładów
- Symulację prowadzi się tak długo, aż uzyskane zmienne statystyczne dla zbioru zmiennych losowych są takie, jak dla modelowanego obiektu (lub przynajmniej spełniają **kryterium dopuszczalnej niezgodności**).
- Wtedy można postawić **hipotezę o zgodności** matematycznego modelu z rzeczywistym obiektem; oczywiście z uwzględnieniem i oszacowaniem niepewności modelu

Metoda MC – schemat blokowy



MC

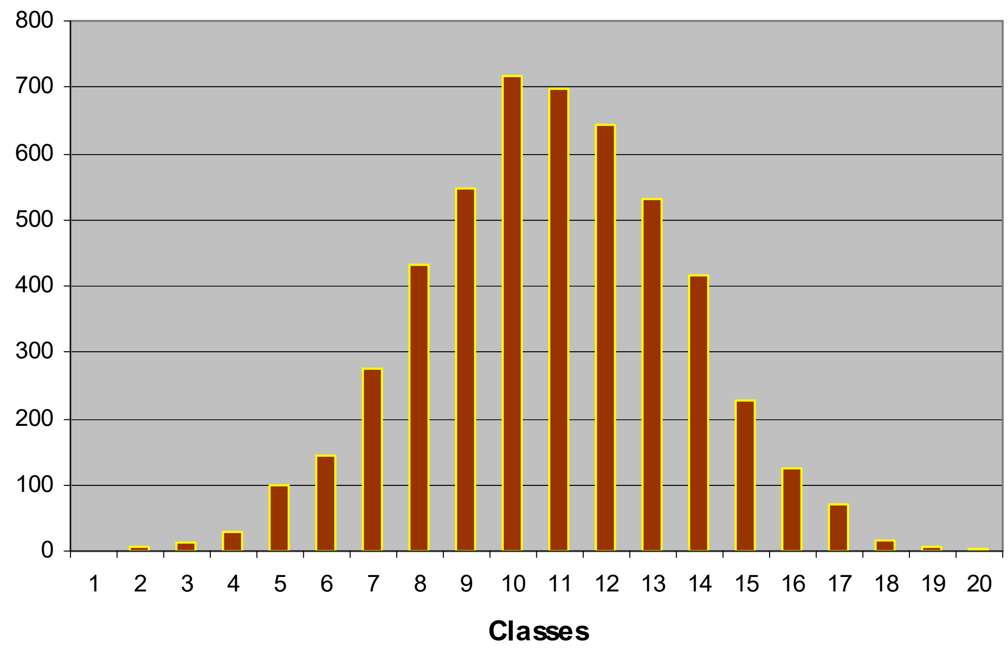
- Przy znanym modelu ilościowym (zależności funkcyjne) symulacje metodami MC mogą być wykonywane w dowolny sposób, który zapewnia użycie generatora losowego - np. przy pomocy Excel

- Przykład: Metoda Box – Muller'a pozwala na obliczenie losowych wartości w standaryzowanym rozkładzie normalnym:

$$RN = \sqrt{-2 \cdot \ln(RU1)} \cdot \cos(2\pi \cdot (RU2))$$

- gdzie RU1 i RU2 są liczbami losowymi z generatora losowego RAND()

Przykładowy wynik



Obliczamy parametry i wyciągamy wnioski na podstawie rozkładu …

Rozkłady statystyczne

- Zmienna losowa definiowana jest przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa, która ma zbiór zmiennych opisujących położenie, kształt i skalę wykresu ją obrazującego. Często znajomość jednej, czy więcej zmiennych nie daje jeszcze pełnej informacji bez znajomości charakteru samego rozkładu.

- Istotne są również inne miary rozkładu, jak: położenia (oprócz średniej arytmetycznej także mediana, kwantyl, moda…), zróżnicowania (odchylenie standardowe, rozstęp kwartylny, wariancja, współczynnik zmienności…), asymetrii (współczynnik asymetrii, współczynnik skośności…), koncentracji (kurtoza).